

专业: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

线  
封  
密

## 第三届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷 (数学类, 2011)

考试形式: 闭卷      考试时间: 150 分      满分: 100 分

题 目	1	2	3	4	5	6	7	总分
满 分	15	10	15	10	15	20	15	100
得 分								

- 注意: 1. 所有答题都必须写在此试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.  
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
 3. 如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标记题号.

得 分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 已知四点  $A(1, 2, 7)$ ,  $B(4, 3, 3)$ ,  $(5, -1, 6)$ ,  $(\sqrt{7}, \sqrt{7}, 0)$ . 试求过这四点的球面方程.

得 分	
评阅人	

二、(本题 10 分) 设  $f_1, f_2, \dots, f_n$  为  $[0, 1]$  上的非负连续函数. 求证: 存在  $\xi \in [0, 1]$  使得

$$\prod_{k=1}^n f_k(\xi) \leq \prod_{k=1}^n \int_0^1 f_k(x) dx.$$

姓名: \_\_\_\_\_ 准考证号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

密 封 线

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设  $F^n$  是数域  $F$  上的  $n$  维列空间,  $\sigma : F^n \rightarrow F^n$  是一个线性变换. 若对  $F$  上的任何  $n$  阶方阵  $A$ ,  $\sigma(A\alpha) = A\sigma(\alpha)$ , ( $\forall \alpha \in F^n$ ), 证明:  $\sigma = \lambda \cdot \text{id}_{F^n}$ , 其中  $\lambda$  是  $F$  中某个数,  $\text{id}_{F^n}$  表示  $F^n$  上的恒等变换.

得 分	
评阅人	

四、(本题 10 分) 对于  $\triangle ABC$ , 求  $3 \sin A + 4 \sin B + 18 \sin C$  的最大值.

姓名: \_\_\_\_\_ 准考证号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

密 封 线

得 分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 对于任何实数  $\alpha$ , 求证: 存在取值于  $\{-1, 1\}$  的数列  $\{a_n\}_{n \geq 1}$ , 满足

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \sqrt{n + a_k} - n^{\frac{3}{2}} \right) = \alpha.$$

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设  $A$  是数域  $F$  上的  $n$  阶方阵. 证明:  $A$  相似于  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ , 其中  $B$  是可逆矩阵,  $C$  是幂零矩阵, 即存在  $m$  使得  $C^m = 0$ .

姓名: \_\_\_\_\_ 准考证号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_ 专业: \_\_\_\_\_

密 封 线

得 分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 设  $F(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的单调递减函数,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} F(t) \sin \frac{t}{n} dt = 0$ .

证明: (i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$ ,

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} F(t) \sin(xt) dt = 0.$$