学习线性代数指导　备考硕士研究生指南

线性代数
解题方法技巧归纳
（第二版）

毛纲源

华中理工大学出版社

学习线性代数指导　备考硕士研究生指南

线性代数解题方法技巧归纳

（第二版）

毛纲源

华中理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题方法技巧归纳(第二版)/毛纲源

武汉:华中理工大学出版社， 2000 年 3 月

ISBN 7-5609-0894-2

Ⅰ. 线…

Ⅱ. 毛…

Ⅲ. 线性代数-解题方法-技巧归纳

Ⅳ. O151. 2

线性代数解题方法技巧归纳(第二版) 毛纲源

责任编辑:李立鹏 封面设计:周 俐
责任监印:熊庆玉

出版发行:华中理工大学出版社
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:武汉皇荣文化发展有限责任公司排版

印刷:核工业中南三〇九印刷厂

开本:850×1168 1/32 印张:15.5 字数:373 000

版次:2000 年 3 月第 2 版 印次:2000 年 9 月第 8 次印刷 印数:38 001—44 000

ISBN 7-5609-0894-2/O · 117 定价:18.00 元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容提要

本书是学习线性代数的指导书，也是备考硕士研究生的应试指南．它将线性代数主要内容按问题分类，通过对精选例题的分析，归纳解题方法技巧，总结解题规律．例题和习题主要来自两部分：一部分来自同济大学数学教研室编的线性代数(第三版)中较难解的典型习题，另一部分是历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一和数学试卷二中的线性代数试题．题型广泛，内容丰富，基本上覆盖了线性代数的主要内容．读者可从中加深理解线性代数的主要内容，熟练掌握各种解题方法、技巧和规律，提高解题和应试能力．

本书可供本(专)科学生学习线性代数阅读和参考，对于自学者和有志攻读硕士学位研究生的青年，本书更是良师益友；对于参加成人教育、自考和文凭考试的读者，本书也不失为一本有指导价值的很好的参考书；对于从事线性代数教学的教师亦有一定的参考价值．

前　言

本书将线性代数的主要内容按问题分类，通过引例，归纳各类问题的解题规律、方法和技巧．例题类型广，有一定梯度，除给出基本概念和基本运算的例题外，还有不少典型例题，其中大部分选自非数学专业的研究生入学试题．

由于本书着重基本解题方法、技巧的归纳和应用，不同于一般的教科书、习题集和题解，它自具特色，对学习线性代数有很好的参考价值．

本书可供大专院校、电大、职大、函大等广大学生学习线性代数时阅读和参考；对于自学者及有志攻读硕士研究生的青年，本书更是良师益友；对于从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值．

本书的编写和出版工作得以顺利进行，是与华中理工大学出版社的大力支持和帮助分不开的，武汉大学熊全淹教授对本书提出了许多宝贵意见，湘潭大学唐佑华教授对初稿作了仔细的审校，提出了很好的修改意见，在此一并表示衷心感谢．

限于作者水平，书中不当之处在所难免，敬请读者指正．

毛纲源　1993 年 5 月于武汉工业大学

第二版前言

本书自1993年出版以来，印刷多次，一直受到广大读者的欢迎与好评，与此同时广大读者对本书也提出了不少宝贵意见，这些意见对本书的修改帮助很大，在此深表谢意.

此次修订较大，增补了不少内容，这些内容都是学好线性代数、备考硕士研究生的重要内容.

本书对同济大学数学教研室编的线性代数（第三版）中较难解的典型习题和历届全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷一和数学试卷二中线性代数试题，都作了详细解答，供学习线性代数和备考硕士研究生的读者阅读参考.

本书虽经修改，限于编者水平，不妥与错误之处仍在所难免，敬请指正.

毛纲源　1999年7月于武汉工业大学

目　　录

第一章　行列式计算

§1.1　如何用定义计算行列式及其部分项

（一）行列式中某项所带符号的确定方法

调换项中元素位置，使每项所对应的行下标（即第一个下标）为自然排列，然后求其列下标所组成的排列的逆序数．根据行列式定义，由其奇偶性，确定该项所带符号．

或者直接分别计算该项行下标和列下标所组成的排列的逆序数，由这两个逆序数之和的奇偶性，确定该项所带符号．

例 1　在 6 阶行列式 $D_6=|a_{ij}|_{6\times 6}$ 中证明 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 是 D_6 的一项，并求这项应带的符号．

解　调换项中元素位置，使其行下标为自然排列，得到

$$a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}=a_{13}a_{26}a_{32}a_{44}a_{51}a_{65}.$$

此时右端的行下标排列为自然排列，列下标排列为 362415，为 6 元排元．因而右端是位于 D_6 的不同行不同列的 6 个元素的乘积，故它是 D_6 的一项．

该项所带符号既可由右端列下标排列的逆序数，也可由左端行下标排列与列下标排列的逆序数之和的奇偶性确定．

因 $\tau(362415)=8$ 或 $\tau(531462)+\tau(123456)=8+0=8$，故所给项应带正号．

例 2　问 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，$a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$ 是不是下列 4 阶行列式 D_4 中的项．若是应带什么符号？

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} \\ a_{21} & a_{32} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{14} & a_{42} & a_{43} \\ a_{12} & a_{41} & a_{13} & a_{24} \end{vmatrix}.$$

解 注意到 a_{ij}的下标并不表示 a_{ij}在 D 中的位置，不能形式地根据下标判别所给两项是不是 D 中的项．应根据这些元素实际在 D_4 中所处位置的行下标，列下标来断定．

由于 a_{11}，a_{22}均位于 D_4 的第一行，即为同行元素，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$不是 D_4 的一项．而 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$中 4 元素依次位于 D_4 中的第 4，3，1，2 行，第 3，2，4，1 列．因而它们是位于 D_4 中不同行不同列 4 个元素的乘积，故 $a_{13}a_{14}a_{44}a_{21}$是 D_4 中一项．因

$$\tau(4312)+\tau(3241)=5+4=9,$$

故这一项在 D_4 中带负号．

（二）用定义计算行列式的方法

对于含零元素较多的行列式可用定义计算．因行列式的项中有一因数为零时，该项的值为零，故只须求出所有非零项即可．如何求出呢？常用下述两法．

法一 求出位于不同行、不同列的非零元素乘积的所有项．

当行列式含大量零元素，尤其是行列式的非零元素乘积项只有一项时，用此法计算简便．

例 3 用行列式定义计算

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} \begin{matrix} (a_{ij}\neq 0, i=k, j=k+1, \\ k=1,2,3,4, \\ a_{5t}\neq 0, t=1,2,3,4,5). \end{matrix}$$

解 由行列式定义，每一非零项由不同行、不同列的 5 个非零元素乘积所组成．第 1 行的非零元素只有 a_{12}，它位于第 2 列，于是

该项第 2 行的非零元素不能在第 2 列，那只有 a_{23}. 同法可求第 3、4 两行中不同行、不同列的非零元素只能取 a_{34}, a_{45}. 第 5 行虽有 5 个非零元素，但与前面 4 个元素不同列的只有 a_{51}，于是该项 5 个非零元素的乘积为 $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$.

再确定该项所带符号. 由于行下标已按自然顺序排，而列下标的排列为 2 3 4 5 1，且该排列的逆序数 $\tau(2\ 3\ 4\ 5\ 1)=4$，故带正号. 因除这一项外，其他不同行、不同列的元素乘积全等于零，所以 $D_5=a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$，解毕.

注意 用上法求非零元素乘积项时，不一定从第 1 行开始，哪行的非零元素最少（最好只有一个）就从哪一行开始，例如可从最后一行开始计算习题 1.1 第 3(1)题.

例 4 一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 多，则此行列式等于零.

解法一 根据行列式定义，该行列式展开后都是 n 个元素相乘，而 n 阶行列式共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数就会小于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，因而该行列式的每项都至少含一个零元素，所以每项必等于零，故此行列式等于零.

法二 求出非零元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的所有 n 元排列，即可求出行列式的所有非零项.

根据 n 阶行列式的定义

$$|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

可知，非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 有多少个，相应地该行列式就含多少个非零项；如果一个也没有，则不含非零项，行列式等于零，这里 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对数码 $1, 2, \cdots, n$ 的所有 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和.

为求出非零项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列，先由第 1 行的非零元素及其位置，写出 j_1 可能取的数码；再由第 $2,3,\cdots,n$ 行的非零元素及其位置分别写出 $j_2,j_3,\cdots,j_n$ 可能取的数码. 在所有可能取的数码中，求出 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的所有 n 元排列.

例 5 用定义，计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & d_1 \\ a_2 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{vmatrix}\quad(a_i,b_i,c_i,d_i\neq 0,i=1,2).$$

解 设 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$，则 D_4 中第 1 行的非零元素为 $a_{11}=a_1$，$a_{13}=b_1$，故 $j_1=1,3$. 同法可求：$j_2=2,4$；$j_3=1,3$；$j_4=2,4$. 因 j_1,j_2,j_3,j_4 能组成四个 4 元排列：

$$1\ 2\ 3\ 4;1\ 4\ 3\ 2;3\ 2\ 1\ 4;3\ 4\ 1\ 2,$$

故 D_4 中相应的非零项共有四项，它们分别为

$$(-1)^{\tau(1\,2\,3\,4)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=a_1c_1b_2d_2,$$

$$(-1)^{\tau(1\,4\,3\,2)}a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}=-a_1d_1b_2c_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,2\,1\,4)}a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}=-b_1c_1a_2d_2,$$

$$(-1)^{\tau(3\,4\,1\,2)}a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}=b_1d_1a_2c_2,$$

其代数和即为 D_4 的值，整理后得

$$D_4=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1).$$

例 6 用定义，计算下列行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解 由 D_5 中第 1,2,3,4,5 行的非零元素分别得到

$$j_1=2,3;\quad j_2=1,2,3,4,5;\ j_5=2,3;$$
$$j_3=1,2,3,4,5;\quad j_4=2,3.$$

因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 在上述可能取的数码中,一个 5 元排列也不能组成,故 $D_5=0$.

注意 一个 n 阶行列式 D 中如果存在某些非零元素 $a_{i_1j_1}$, $a_{i_2j_2},\cdots,a_{i_sj_s}(2\leqslant s\leqslant n)$,其列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s$ 所能取的不同数码个数小于行数 s,则 $D=0$. 这是因为 D 中非零元素的列下标 $j_1,j_2,\cdots,j_s,j_{s+1},\cdots,j_n$ 连一个 n 元排列也不能组成,即 D 中没有 n 个非零元素相乘的项,从而 $D=0$. 例如,在 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

中第 1,4,5 行的非零元素的列下标取值为

$$j_1=1,3;\quad j_4=1,3;\quad j_5=1,3.$$

因它们所取的不同数码只有两个(1 与 3),其个数小于行数($s=3$),故 $D_5=0$.

上述 $D=0$ 的结论如从 D 中所含零元素个数来看,则可说成:

若 n 阶行列式 D 中位于某 s 行,k 列交叉处元素全为 0,且 $s+k>n$,则此行列式 D 等于 0.

例 7 用定义,计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1985 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1986 \end{vmatrix}.$$

解　为求 D 的值,只须求出 D 中所有非零项.

D 中第 1 行的非零元素只有 $a_{1,1985}$,因而 j_1 只能取 1985,即 $j_1=1985$. 同理 $j_2=1984$, $j_3=1983$, $\cdots$, $j_{1985}=1$, $j_{1986}=1986$,于是 $j_1, j_2, \cdots, j_{1985}, j_{1986}$在可能取的数码中,$j_1j_2\cdots j_{1985}j_{1986}$只能组成一个 1986 元排列:

$$1\,9\,8\,5\quad 1\,9\,8\,4\cdots 2\quad 1\quad 1\,9\,8\,6,$$

故 D 中非零项只有一项,即

$$D=(-1)^{\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)}a_{1,1985}a_{2,1984}\cdots a_{1985,1}a_{1986,1986}.$$

因 $\tau(1985,1984,\cdots,2,1,1986)=1984+1983+\cdots+2+1=1985\times 992$ 为偶数,故

$$D=(-1)^{1985\times 992}1\times 2\times 3\cdots\times 1985\times 1986=1986!\ .$$

(三)行列式中含特定元素的所有项的求法

一般用行列式的定义求出.

例 8[1.3]* 　写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项.

解　设四阶行列式为 $D_4=|a_{ij}|_{4\times 4}$,D_4 中含有因子 $a_{11}a_{23}$的所有项数为 4 元排列,$13j_3j_4$ 的个数,而 $13j_3j_4$ 能组成的 4 元排列共有两个,即 1 3 2 4 与 1 3 4 2 相应的项分别为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}=-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44},$$

$$(-1)^{\tau(1\,3\,4\,2)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}=a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}.$$

因而四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$的项只有上述两项.

例 9　试求 $f(x)$中 x^4 的系数,已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -[illegible] & [illegible] & 1 & 3 & 0 \\ x & [illegible] & x & 11 & 4 \\ -1 & [illegible] & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & [illegible] & 5 \\ 1 & -7 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

* [1.3]表示该例(或习题)是同济大学数学教研室编的《线性代数》(第三版)中习题一第 2 题. 下同.

解 $f(x)$中含 x 为因子的元素有

$a_{11}=-x,\qquad a_{21}=x,\qquad a_{23}=2x,\qquad a_{32}=x,$

$a_{35}=3x,\qquad a_{44}=x,\qquad a_{52}=-7x.$

因而，含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取：

$$j_1=1;\ j_2=1,3;\ j_3=2,5;\ j_4=4;\ j_5=2.$$

于是，含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取 $j_1=1, j_2=3, j_3=2, j_4=4$ 与 $j_2=1, j_3=5, j_4=4, j_5=2$；相应的 5 元排列只有 1 3 2 4 5，3 1 5 4 2，含 x^4 的相应项为

$$(-1)^{\tau(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}\,a_{23}\,a_{32}\,a_{44}\,a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{\tau(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}\,a_{21}\,a_{35}\,a_{44}\,a_{52}=21x^4,$$

故 $f(x)$中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

习　　题　1.1

1. 若$(-1)^{\tau(1\,k\,4\,l\,5)+\tau(1\,2\,3\,4\,5)}a_{11}a_{k2}a_{43}a_{l4}a_{55}$是 5 阶行列式$|a_{ij}|_{5\times5}$的一项，求 k,l 之值及该项所带符号.

2. 写出 4 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{4\times4}$中所有含 a_{13}且带负号的项.

3. 用定义，计算下列行列式

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. $=0$

4. 求出 $f(x)$中 x^4 与 x^3 的系数：$-3x^3$

$15x^4$

$$f(x)=\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & x & 3 \\ x & x & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3x \end{vmatrix}.$$

5. 由计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

证明奇偶排列各半.

§1.2 如何计算一行(列)与另一行(列)的分行(分列)成比例的行列式

为方便起见,以 r_i 表示行列(或矩阵)的第 i 行,以 c_i 表示其第 i 列,k 为常数.

(i)交换第 i,j 两行(列),记作 $r_i\leftrightarrow_j(c_i\leftrightarrow c_j)$.

(ii)第 i 行(列)乘以 k(不等于 0),记作 $r_i(k)[c_i(k)]$.

(iii)第 j 行(列)乘以 k 加到第 i 行(列)上,记作 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

所谓一行(列)与另一行(列)的分行(列)成比例是指,该行(列)元素与另一行(列)的分行(列)的对应元素成比例.

一个行列式的第 i 行(列)元素乘以常数 k 加到第 j 行(列)($i\neq j$)上,消掉第 j 行(列)中的一分行(列),下称在第 j 行(列)中去掉与第 i 行(列)成比例的分行(列),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1}+b_{j1} & ka_{i2}+b_{j2} & \cdots & ka_{in}+b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_j+(-k)r_i}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

能用去掉成比例的分行(列)的方法计算的 n 阶行列式 D_n 有以下几种情况：

(一) D_n 中第 1 列(或第 n 行)的元素(它们都不在主对角线的上方)全部相同，而主对角线上方的元素全部相同或可化为全部相同，一次去掉与第 1 列(或第 n 行)成比例的分列(行)，原行列式 D_n 即可化为下三角行列式.

同样第 1 行(或第 n 列)元素(它们都不在主对角线下方)全部相同，而主对角线下方元素又全部相同的行列式用上法即可化为上三角行列式.

例 1 计算下列行列式

$$(1)\ D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

$$(2)\ \Delta_{n+1}=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}.$$

解 (1)**解法一** D_n 中第 1 行元素全部相同，将其他各行改写成两分行之和，去掉与第 1 行成比例的分行，得到

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1+0&1+1&1+0&\cdots&1+0\\1+0&1+0&1+2&\cdots&1+0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1+0&1+0&1+0&\cdots&1+n-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&n-1\end{vmatrix}=(n-1)!.$$

解法二 D_n 中第 1 列元素也全部相同，各列中去掉与第 1 列成比例的分列，D_n 即可化成下三角行列式，得到解法一的结果.

(2)**解法一** Δ_{n+1}中去掉与第 n 列成比例的分列得到

$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}x_1&0&\cdots&0&a\\0&x_2&\cdots&0&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&x_n&a\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}=a\prod_{i=1}^{n}x_i.$$

解法二 去掉与第 n 行成比例的分行得到解法一中结果.

(二) D_n 中有一行(列)元素全部相同，但主对角线上方或下方的元素不全相同，有时也可直接用上法求之；或者先用行列式的性质化成全部相同，再用上法求之.

例 2 计算

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}x&a_1&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\\a_1&x&a_2&\cdots&a_{n-1}&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_1&a_2&a_3&\cdots&x&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n&1\end{vmatrix}.$$

解 在 D_{n+1}中去掉与第 n 列成比例的分列，得到

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} x-a_1 & a_1-a_2 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ 0 & x-a_2 & \cdots & a_{n-1}-a_n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a_n & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i).$$

例 3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & a & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & a & a & 1 & 2 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a & a & a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix}.$$

解 D_n 的主对角线上方后一列元素比前一列的对应元素大 1，所以可从第 n 列开始后列减去前列，即可将主对角线上方元素全部化成 1，

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a-2 & -1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a-2 & -1 & -1 & \cdots & -a & 0 \\ 1 & a-2 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -a \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}a^{n-2}.$$

(三) D_n 中没有元素全部相同的行(列),但如各行(列)的行(列)和相等,可化为有一行(列)元素相同的行列式,再仿(一)中所述方法求之.

例 4[1997 年 4]* 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

解法一 各列的和相等,将各行加到第 1 行,提取公因式去掉与第 1 行成比例的分行,得到

$$D_n=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1).$$

解法二 将各行加到第 n 行,提取公因式,去掉与第 n 行成比例的分行,也得同样结果.

解法三 因各行和也相等,将各列都加到第 1 列,也得同样结果.

---

* 表示该例是 1997 年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试卷四考题.下同.

解法四 将各列都加到第 n 列，也得同样结果.

例 5[1989 年 5] 计算

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ x+1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

解 Δ_4 仅各行的和相等，将各列都加到第 1 列，得到

$$\Delta_4=x\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & x-1\\ 1 & -1 & x+1 & -1\\ 1 & x-1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 1 & 0 & x & 0\\ 1 & x & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=x(-)^{4(4-1)/2}x^3=x^4.$$

注意 最后一个等式利用了习题 1.1 第 3(1)题的结果：

$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{1n}\\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \quad (1.2.1)$$

使用上述结果计算次对角线上方和(或)下方元素全为零的行列式时，一方面千万别忘掉所带符号$(-1)^{n(n-1)/2}$，另一方面要知道所带符号的确定方法：

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时，$n(n-1)/2$ 为偶数，该项带正号；

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时，$n(n-1)/2$ 为奇数，该项带负号；

其中 k 为非负整数，n 为行列式的阶数，上例中 $k=1$，带正号.

（四） 对于部分行(列)的元素为两数或两数以上的代数和

(或代数和平方)的行列式，常展开后多次去掉成比例的分行(分列)，将原行列式化成易于计算的行列式.

例 6 证明

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}=4(a-b)(a-c)(b-c).$$

证 令上式左端行列式为 D_3，将其第 2,3 列元素展开，去掉与第 1 列成比例的分列，再在新行列式多次去掉成比例的分列，得到

$$D_3=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+1 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+1 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2(2a+1)+2 \\ b^2 & 2b+1 & 2(2b+1)+2 \\ c^2 & 2c+1 & 2(2c+1)+2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2 & 2a & 2 \\ b^2 & 2b & 2 \\ c^2 & 2c & 2 \end{vmatrix}$$

$$=4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2-a^2 & b-a & 0 \\ c^2-a^2 & c-a & 0 \end{vmatrix}$$

$$=4(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & 1 \\ c+a & 1 \end{vmatrix}=4(b-a)(c-a)(b-c).$$

(五) 对于各行(列)元素均为代数和(或代数和的平方)的行列式，常先按第一行(列)将原行列式拆分为两个行列式[这两个行列式的第一行(列)的元素分别为原行列式第一行(列)的两个加数之一，其余各行(列)的元素与原行列式相同]，然后按(四)中所述方法计算之.

例 7[1.5(2)] 证明

$$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}=(a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

解 将等式左端按第1列拆分为两个行列式之和：

$$\begin{vmatrix} by & bz+ax & bx+ay \\ bx & by+az & bz+ax \\ bz & bx+ay & by+az \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} az & bz+ax & bx+ay \\ ay & by+az & bz+ax \\ ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}.$$

在上面第1个行列式中去掉成比例的分列得到

$$\begin{vmatrix} by & bz+ax & bx+ay \\ bx & by+az & bz+ax \\ bz & bx+ay & by+az \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} by & bz+ax & bx \\ bx & by+az & bz \\ bz & bx+ay & by \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix}=b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix}=b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix};$$

同法可证

$$\begin{vmatrix} az & bz+ax & bx+ay \\ ay & by+az & bz+ax \\ ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix}=a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}.$$

例8 计算行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}.$$

解 n阶行列式D_n的值与n有关，下分四种情况讨论.

(1)当$n=3$时，将D_3拆分为两个行列式，去掉与第1列成比例的分列得到

$$D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ a_3 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & a_1+b_3 \\ b_1 & a_2+b_2 & a_2+b_3 \\ b_1 & a_3+b_2 & a_3+b_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 & a_2 \\ b_1 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}=0+0=0.$$

这里由于 $n=3$ 除第 1 列外，还有成比例的两列，故上行列式等于零.

(2)$n>3$ 时，除第 1 列外，也还有成比例的两列，故 $D_n=0$，事实上，

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

而右端第一个行列式中去掉与第 1 列成比例的分列得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & b_n \\ a_2 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_n & \cdots & b_n \end{vmatrix}=0;$$

同法可证上面右端第二个行列式也等于零.

(3)$n=2$ 时，所给行列式除第 1 列外只有一列，不存在成比例的两列，因而 D_2 不一定等于零. 事实上

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 \\ a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 \\ b_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1-a_2)(b_1-b_2).$$

显然在一般情况下，$D_2\neq 0$.

(4)当 $n=1$ 时，$D_1=a_1+b_1$.

注意 解题过程中要全面思考和分析，不可忽略某些特殊情况.

(六) 去掉成比例的分行(分列)还可用来简化计算其元素为很大数字的数字行列式. 其法是常将其他各行(列)的元素表成某行(列)元素的倍式加上或减去一个较小的数.

例 9 计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}.$$

解 $$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 100+3 & 100 & 200+4 \\ 200-1 & 200 & 400-5 \\ 300+1 & 300 & 600+0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \cdot 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2000$$

习　　题　1.2

计算下列行列式：

1. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix};$$ (n-1)

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & n \end{vmatrix};$$

3. [1988 年 4、5] $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$;

4. [1. 5(3)] $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$;

5. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

6. $\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$.

§1.3 行列式按行(列)展开定理的两点应用

行列式按行(列)展开定理是指的下述两定理:

定理 1.3.1 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$等于它的任意一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积的和,即

$$D=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(i=1,2,\cdots,n), \tag{1.3.1}$$

或

$$D=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(j=1,2,\cdots,n). \tag{1.3.2}$$

定理 1.3.2 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_{n\times n}$的某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积的和等于零,即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{sj}=0 \quad (i\neq s), \tag{1.3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{it}=0 \quad (j\neq t). \tag{1.3.4}$$

应用一 计算行列式的值.

行列式按某一行(列)展开能将高阶行列式的计算转化为若干个较低阶行列式的计算,是计算数字型行列式的常用方法.值得注意的是,展开前往往先利用行列式性质,将某行(列)的元素尽可能多的消成零,然后利用定理 1.3.1 降阶计算.

例 1[1.4(1),(3)] 计算下列行列式:

$$(1)\Delta_1=\begin{vmatrix}4&1&2&4\\1&2&0&2\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix};(2)\Delta_2=\begin{vmatrix}a&1&0&0\\-1&b&1&0\\0&-1&c&1\\0&0&-1&d\end{vmatrix}.$$

解 为运算方便起见,常先将元素"1"(如果有)调至行列式的第 1 行、第 1 列.

$$(1)\Delta_1\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}(-1)\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&1&2&4\\10&5&2&0\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3]{r_i+(-2)r_4}(-1)\begin{vmatrix}1&2&0&2\\4&-1&0&-10\\10&3&0&-14\\0&1&1&7\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(0\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+0\cdot A_{33}+1\cdot A_{43})$$

(按第 3 列展开)

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&2&2\\4&-1&-10\\10&3&-14\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3]{r_i+(-2)r_1}(-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\4&-9&-18\\10&-17&-34\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(1\cdot A_{11}+0\cdot A_{12}+0\cdot A_{13})\text{(按第 1 行展开)}$$

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-9&-18\\-17&-34\end{vmatrix}=0\text{(两列成比例)}.$$

$$(2)\Delta_2 \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}(-1)\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ b & -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+(-b)r_1}(-1)\begin{vmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & -1-ab & 1 & 0\\ 0 & a & c & 1\\ 0 & 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$=(-1)(1\cdot A_{11}+0\cdot A_{22}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41})$$

（按第 1 列展开）

$$=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1-ab & 1 & 0\\ a & c & 1\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2+cr_3]{r_1+r_3}(-1)\begin{vmatrix}-1-ab & 0 & d\\ a & 0 & 1+dc\\ 0 & -1 & d\end{vmatrix}$$

$$=(-1)[0\cdot A_{13}+0\cdot A_{23}+(-1)A_{33}]\text{（按第 3 列展开）}$$

$$=(-1)\left[(-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-1-ab & d\\ a & 1+dc\end{vmatrix}\right]$$

$$=abcd+ab+ad+dc+1.$$

注意 利用代数余子式计算行列式时，余子式所带的符号$(-1)^{i+j}$千万不要遗忘．按某一行或某一列展开时，展开式中各项所带符号有下列规律

$$\begin{vmatrix}+ & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ + & - & + & - & \cdots\\ - & + & - & + & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix},$$

即行列式中主对角线上元素的余子式总是带正号，其他元素余子式所带符号依次是负正相间.

一行(列)至多含两个非零元素的行列式，可用按行(列)展开的方法计算该行列式. 此法是最基本的方法，但却容易出错，原因在于不能正确写出非零元素的代数余子式，或者余子式计算有误，或者余子式所带的符号算错. 为正确写出非零元素的代数余子式，先将原行列式的右下角，右上角，左下角，左上角的 2 阶子式写出(如果原行列式中没有写出)，这样按第 1 行(列)或第 n 行(列)展开时，非零元素的余子式就能正确写出. 而要正确计算余子式所带的符号还应留心展开后的行列式的阶数是多少.

例 2[1.7(1)] 计算下列 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & a \end{vmatrix},$$

其中对角线上元素都是 a，未写出的元素都是零.

解法一 先将 D_n 中左上角、左下角及右上角、右下角的 2 阶子式补写出来. 然后按第 1 行，或第 1 列，或第 n 行，或第 n 列展开. 下面将 D_n 按第 1 行展开，得到

$$D_n=\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=a\cdot a^{n-1}+(-1)^{n+1}(-1)^{n-1+1}\cdot\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a&0\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$$

$$=a^n+(-1)^{2n+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

解法二 $D_n \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_n}\begin{vmatrix}1&&&a\\&a&&\\&&\ddots&\\a&&&1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_n+(-a)r_1}\begin{vmatrix}1&&&a\\&a&&\\&&\ddots&\\0&&&1-a^2\end{vmatrix}$$

$$=-a^{n-2}(1-a^2)=a^{n-2}(a^2-1).$$

例 3[1996 年 1,2] 4 阶行列式 $\begin{vmatrix}a_1&0&0&b_1\\0&a_2&b_2&0\\0&b_3&a_3&0\\b_4&0&0&a_4\end{vmatrix}$ 的值等于

(A)$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$. (B)$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$.

(C)$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$. (D)$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

解法一 令所给四阶行列式为 Δ_4. 按第一行展开得到

$$\Delta_4=a_1\begin{vmatrix}a_2&b_2&0\\b_3&a_3&0\\0&0&a_4\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}b_1\begin{vmatrix}0&a_2&b_2\\0&b_3&a_3\\b_4&0&0\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3)-b_1b_4(a_2a_3-b_2b_3)$$

$$=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4),$$

故(D)对,其余都不对.

解法二 为迅速准确找出选项,可令 a_1,b_1,b_4,a_4 中任一个等

于零．例如令 $b_1=0$，这时按第 1 行展开，有

$$\Delta_4=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=a_1a_4(a_2a_3-b_2b_3).$$

在所给的四个选项中当 $b_1=0$ 时，只有(D)成立，故仅(D)入选．

例 4 用展开的方法证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ *_1 & *_2 & b_{11} & b_{12} \\ *_3 & *_4 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \qquad (1.3.5)$$

其中“$*_i$”为任意数，$i=1,2,3,4$.

解 令上式左端的行列式为 D_4. 按其第一行展开，得

$$\begin{aligned} D_4 &=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ *_2 & b_{11} & b_{12} \\ *_4 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & 0 & 0 \\ *_1 & b_{11} & b_{12} \\ *_2 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}-a_{12}a_{21}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{22})\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

注意 一般有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & * & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1m} & & & \\
\vdots & & \vdots & & * & \\
a_{m1} & \cdots & a_{mm} & & & \\
 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
 & 0 & & \vdots & & \vdots \\
 & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mm}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}, \tag{1.3.6}
$$

但

$$
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\
a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 & & & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\
 & * & & \vdots & & \\
 & & & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\
a_{11} & \cdots & a_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mm} & 0 & \cdots & 0
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \\
b_{11} & \cdots & b_{1n} & & & \\
\vdots & & \vdots & & * & \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn} & & &
\end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{mn}\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1m} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mm}
\end{vmatrix}
\begin{vmatrix}
b_{1n} & \cdots & b_{1n} \\
\vdots & & \vdots \\
b_{n1} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}. \tag{1.3.7}
$$

例 5[1999 年 2]　记行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$$

为 $f(x)$，则方程 $f(x)=0$ 的根的个数为______.

(A)1　　　　(B)2　　　　(C)3　　　　(D)4

解　把上行列式的第 1 列的 -1 倍分别加到第 2,3,4 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

由(1.3.5)式得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix}=5x(x-1).$$

显然 $f(x)=0$ 的根的个数为 2，(B)入选.

例 6　变量 x_1,x_2,x_3,x_4 与变量 y_1,y_2,y_3,y_4 有下面的线性关系：

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{12}y_2+a_{13}y_3+a_{14}y_4=x_1; \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+a_{23}y_3+a_{24}y_4=x_2; \\ a_{31}y_1+a_{32}y_2+a_{33}y_3+a_{34}y_4=x_3; \\ a_{41}y_1+a_{42}y_2+a_{43}y_3+a_{44}y_4=x_4. \end{cases}$$

已知其系数行列式不等于零.

(1)将 y_1,y_2,y_3,y_4 用 x_1,x_2,x_3,x_4 表示；

(2)求 $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i}(i,j=1,2,3,4)$.

解　(1)令 D 为上方程组的系数行列式，且 D 中元素 a_{ij} 的代

数余子式为 A_{ij}. 又令

$$D_1=\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ x_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第 1}} \sum_{i=1}^{4} x_i A_{i1},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & x_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第 2}} \sum_{i=1}^{4} x_i A_{i2},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & x_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & x_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & x_4 & a_{44} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第 3}} \sum_{i=1}^{3} x_i A_{i3},$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & x_4 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{列展开}]{\text{按第 4}} \sum_{i=1}^{4} x_i A_{i4}.$$

于是有 $D_j=\sum\limits_{i=1}^{4} x_i A_{ij}(j=1,2,3,4)$. 且因 $D\neq 0$,由克莱姆法则得到

$$y_j=D_j/D=\left(\sum_{i=1}^{4} x_i A_{ij}\right)/D \quad (j=1,2,3,4).$$

(2)注意到 x_1,x_2,x_3,x_4 为相互独立的变量,由

$$y_1=(x_1A_{11}+x_2A_{21}+x_3A_{31}+x_4A_{41})/D$$

得到

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=\frac{A_{11}}{D},\frac{\partial y_1}{\partial x_2}=\frac{A_{21}}{D},\frac{\partial y_1}{\partial x_3}=\frac{A_{31}}{D},\frac{\partial y_1}{\partial x_4}=\frac{A_{41}}{D}.$$

上面四式可概括为 $\frac{\partial y_1}{\partial x_i}=\frac{A_{i1}}{D} \quad (i=1,2,3,4)$. 同法可求得

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_i}=\frac{A_{i2}}{D},\frac{\partial y_3}{\partial x_i}=\frac{A_{i3}}{D},\frac{\partial y_4}{\partial x_i}=\frac{A_{i4}}{D}\quad(i=1,2,3,4).$$

上面四式又可进一步概括为

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=\frac{A_{ij}}{D}\quad(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4).$$

应用二 求某行(列)元素的代数余子式的(代数)和.

已知行列式 $D=|a_{ij}|$ 及其元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 和任意 n 个数 $k_1,\cdots,k_n$,求和式 $\sum\limits_{j=1}^{n}k_jA_{ij}$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_iA_{ij}$.

首先应注意,上面的和式均表示某个行列式 $\tilde{D}$,其第 i 行或第 j 列元素为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,因此将 D 的第 i 行元素或第 j 列元素改为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 即为 $\tilde{D}$. 写出 $\tilde{D}$ 后,再算出 $\tilde{D}$,即为所求的和式.

如果 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 恰为 D 中某行但不是第 i 行,或为某列但不是第 j 列元素,则由(1.3.3)或(1.3.4)式即得上述和式的值为 0.

例 7 设 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\2&3&4&5\\6&7&8&9\end{vmatrix}$,求 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$,其中 $A_{i2}(i=1,2,3,4)$ 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式.

解法一 因 A_{i2} 为 D 中元素 a_{i2} 的代数余子式$(i=1,2,3,4)$,故将 D 中第 2 列元素依次换为 3,7,4,8,即得

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=\begin{vmatrix}1&3&3&4\\5&7&7&8\\2&4&4&5\\6&8&8&9\end{vmatrix}=0.$$

解法二 因 3,7,4,8 恰为 D 中第 3 列元素,而 $A_{12},A_{22},A_{32},A_{42}$ 为 D 中第 2 列元素的代数余子式,故 $3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}$ 表示 D 中第 3 列元素与另一列(第 2 列)的对应元素的代数余子式乘积的和,由(1.3.4)式知此和必等于零,即

$$3A_{12}+7A_{22}+4A_{32}+8A_{42}=0.$$

例 8 已知 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&2&1&1\\3&1&2&4&5\\1&1&1&2&2\\4&3&1&5&0\end{vmatrix}=27.$$

求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$，其中 $A_{4j}(j=1,2,3,4,5)$ 为 D_5 中第 4 行第 j 列元素的代数余子式．

解 由已知条件及(1.3.1)式、(1.3.3)式分别得到

$$\begin{cases}(1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43})+(2\cdot A_{44}+2\cdot A_{45})=27,\\(2\cdot A_{41}+2\cdot A_{42}+2\cdot A_{43})+(1\cdot A_{44}+1\cdot A_{45})=0.\end{cases}$$

由上面两个方程可解得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9;A_{44}+A_{45}=18.$$

习　　题 1.3

1. 计算下列行列式：

(1)［1.4(2)］ $D_4=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\1&2&3&2\\5&0&6&2\end{vmatrix}$；

(2) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&&&\\0&\lambda&-1&&\\0&&\ddots&\ddots&\\&&&\lambda&-1\\-1&&&&\lambda\end{vmatrix}$.

2. 设 4 阶行列式 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&c&d\\c&b&d&a\\d&b&c&a\\a&b&d&c\end{vmatrix}$，则 $\sum\limits_{i=1}^{4}A_{i4}=\underline{\quad 0\quad}$.

3. n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$，则 $\sum\limits_{j=1}^{n} A_{nj}=$______.

4. 证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & x_2 \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 0 \end{vmatrix} = -\sum\limits_{i,j=1}^{3} A_{ij}\, x_i x_j$，其中 A_{ij} 为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

5. [1992 年 4] 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a$，$|B|=b$，$C=\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$，则 $|C|=$ $(-1)^{mn}ab$

§1.4 如何证明一行列式能被某一整数整除

下面所讨论的 n 阶行列式 D_n，其元素均为个位整数．D_n 被某整数整除的命题有如下两种类型，其证法基本相同.

第一种类型是命题中给出能被某整数 m 整除的 n 个整数 a_1，a_2，…，a_n；且 a_i 是 n 位数，其各位数字恰为 D_n 中第 i 行(列)的各个元素，$i=1,2,\cdots,n$.

其证法是：由于 D_n 的元素为个位整数，将第 1 列(行)乘上 10^{n-1}，将第 2 列(行)乘上 10^{n-2}，…，将第 $n-1$ 列(行)乘上 10，都加到第 n 列(行)上，则 D_n 的第 n 列(行)恰为所给定的 n 个数. 由于第 n 列(行)的元素都能被 m 整除(以下简称第 n 列(行)被 m 整除)，故 D_n 也能被 m 整除.

例 1 已知 1 3 2 6，2 7 4 3，5 0 0 5，3 8 7 4 都能被 13 整除，不计算行列式的值，试证

$$D_n=\begin{vmatrix}1&3&2&6\\2&7&4&3\\5&0&0&5\\3&8&7&4\end{vmatrix}$$

能被 13 整除.

证 把 D_4 的第 1 行看成一个四位数,其千位数字为 1,百位数字为 3,十位数字为 2,个数数字为 6. 同样将 D_4 的第 2,3,4 行也分别看成四位数 2743,5005,3874.

为使 D_4 的第 4 列上各元素变成这四个四位数,将第 1,2,3 列分别乘以 $10^3,10^2,10$,且都加到第 4 列,得到:

$$D_4=\begin{vmatrix}1&3&2&1326\\2&7&4&2743\\5&0&0&5005\\3&8&7&3874\end{vmatrix}.$$

由题设 13 整除上行列式的第 4 列,故 13 能整除 D_4.

例 2 已知 204,527,255 都能被 17 整除,试证

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\4&7&5\end{vmatrix}$$

能被 17 整除.

证 给定的三个 3 位数,其各位数字恰分别为 D_3 的 3 个列的元素. 为将 D_3 的第 3 行的 3 个元素分别化成 204,527,255,将 D_3 的第 1,2 行分别乘上 $10^2,10$,且都加到第 3 行,得到

$$D_3=\begin{vmatrix}2&5&2\\0&2&5\\204&527&255\end{vmatrix}.$$

由题设,17 能整除上行列式的第 3 行,故 D_3 能被 17 整除.

例 3 已知 $a_1=x_{11}x_{21}\cdots x_{n1},a_2=x_{12}x_{22}\cdots x_{n2},\cdots,a_n=x_{1n}x_{2n}\cdots x_{nn}$为 n 个 n 位数,其中个位整数 x_{ij}为第 j 个 n 位数 a_j 的第 i 位数

字$(i,j=1,2,\cdots,n)$，且 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$能被自然数 m 整除，试证下行列式 D_n 能被 m 整除：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 因 D_n 的诸元素均为个位整数，且其 n 个列的元素分别为 n 个 n 位数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的各位数字，故将 D_n 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行分别乘以 $10^{n-1},10^{n-2},\cdots,10$，且都加到第 n 行，则该行元素化成 n 个 n 位数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，即

$$D_n=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \\ \sum\limits_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{i1} & \sum\limits_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{i2} & \cdots & \sum\limits_{i=1}^{n}10^{n-i}x_{in} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 m 能整除 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，故 m 也能整除 D_n.

第二种类型是题设中没有给出被某整数整除的数，要求证明行列式能被某整数整除.

这类命题的证法与前一类相似.值得注意的是，应将 D_n 的各行(列)数字分别看成一个 n 位数，该行(列)第 i 列(行)上的数字视为这个 n 位数的第 i 位数字，然后证明这 n 个 n 位数都能被给定的某整数所整除，最后用前述方法将 D_n 的第 n 列(行)的元素化成相应的 n 位数，命题即可获证.

例 4 用行列式性质，证明下列行列式能被 13 整除：

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\3 & 2 & 5\\4 & 1 & 6\end{vmatrix}.$$

证 本例虽未给出能被 13 整除的 3 个数，但将 D_3 的 3 个行分别看成 3 个 3 位数 104,325,416，不难验证它们都能被 13 整除. 为将第 3 列的各元素分别化成上述 3 个数，将 D_3 的第 1,2 列分别乘上 10^2,10，且都加到第 3 列，得到

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 0 & 104\\3 & 2 & 325\\4 & 1 & 416\end{vmatrix}.$$

因第 3 列能被 13 整除，故 D_3 也能被 13 整除. 证毕.

上法特别适用除数 m 为素(质)数的情况. 如果 m 为合数，且其各因数分别能整除一行列式某行(列)或某些行(列)，由行列式性质即知该行列式能被合数 m 整除.

例 5 已知 1998,2196,2394,1800 都能被 18 整除，不计算行列式的值，证明下行列式能被 18 整除：

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 9 & 9 & 8\\2 & 1 & 9 & 6\\2 & 3 & 9 & 4\\1 & 8 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

证明一 因 $18=2\times 9$ 为合数，且 D_4 的第 3,4 两列分别可被 9,2 所整除，由行列式性质，D_4 可被 18 整除.

证明二 将 D_4 的第 1,2,3 列分别乘以 10^3,10^2,10，且都加到第 4 列，得到

$$D_4=\begin{vmatrix}1 & 9 & 9 & 1998\\2 & 1 & 9 & 2196\\2 & 3 & 9 & 2394\\1 & 8 & 0 & 1800\end{vmatrix}.$$

因上行列式第 4 列能被 18 整除，故 D_4 能被 18 整除.

例 6 一个有 n 个数位的 t 进制正整数：

$$a=a_{n-1}t^{n-1}+a_{n-2}t^{t-2}+\cdots+a_1t+a_0(a_i \text{ 为整数}).$$

简记为 $a=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$. 又令

$$a_i=\overline{a_{n-1}^{(i)}a_{n-2}^{(i)}\cdots a_1^{(i)}a_0^{(i)}} \quad (i=1,2,\cdots,n,\text{且 } a_j^{(i)} \text{ 为整数}).$$

如果 a_i 均被正整数 p 整除，则下列行列式 D 可被 p 整除：

$$D=\begin{vmatrix} a_{n-1}^{(1)} & a_{n-1}^{(2)} & \cdots & a_{n-1}^{(n)} \\ a_{n-2}^{(1)} & a_{n-2}^{(2)} & \cdots & a_{n-2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_0^{(2)} & \cdots & a_0^{(n)} \end{vmatrix}.$$

证 将 D 的第 1 行乘以 t^{n-1}，第 2 行乘以 t^{n-2}，…，第 $n-1$ 行乘以 t，且都加到第 n 行上，得到

$$D=\begin{vmatrix} a_{n-1}^{(1)} & a_{n-1}^{(2)} & \cdots & a_{n-1}^{(n)} \\ a_{n-2}^{(1)} & a_{n-2}^{(2)} & \cdots & a_{n-2}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix}.$$

因 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 p 的倍数，故 D 的最后一行能被 p 整除，从而 D 也能被 p 整除.

习　　题 1.4

1. 证明下列行列式能被 11 整除：

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 9 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. 不计算行列式的值，证明下列行列式能被 18 整除：

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. 已知 n 个 n 位数 $a_1=x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}$, $a_2=x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}$, $\cdots$, $a_n=x_{n1}x_{n2}\cdots$

x_{nn}，其中 x_{ij}为 n 位数 a_i 的第 j 位数字$(i,j=1,2,\cdots,n)$，且自然数 m 能整除 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$，试证下列行列式能被 m 整除：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}.$$

§1.5 如何利用范德蒙行列式计算行列式

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为行元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j); \qquad (1.5.1)$$

以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为列元素的 n 阶范德蒙行列式的算式为

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j). \qquad (1.5.2)$$

读者不仅要注意范德蒙行列式的下述结构特点，还要记住等式右边的结果(连乘号中共有 $n(n-1)/2$ 个因子相乘).

(1.5.1)式中 n 阶行列式 D_n 的每列都是某一个数的不同方幂，且自上而下方幂次数由 0 递增至 $n-1$；而(1.5.2)式中 n 阶行列式 Δ_n 的每行都是某一个数的不同方幂，且方幂次数从左至右由 0 递增至 $n-1$.

如何利用范德蒙行列式计算行列式，应先根据范德蒙行列式的上述特点，将所给行列式化为范德蒙行列式，然后按(1.5.1)或(1.5.2)式计算结果.

常见的化法有以下几种：

法一 所给行列式各列(或各行)都是某元素的不同方幂，但其方幂次数或其排列与范德蒙行列式不完全相同，需利用行列式性质[如提取公因式，调换各行(或列)的次序等]将行列式化成范德蒙行列式.

例 1 计算
$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2^2 & \cdots & 2^n\\ 3 & 3^2 & \cdots & 3^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n^2 & \cdots & n^n\end{vmatrix}.$$

解 D_n 中各行元素都分别是一个数的不同方幂，且方幂次数从左至右按递升次序排列，但不是从 0 变到 $n-1$，而是由 1 递升至 n. 如提取各行的公因数，则方幂次数便从 0 增至 $n-1$，于是得到
$$D_n=n!\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1}\end{vmatrix}.$$
上等式右端行列式为 n 阶范德蒙行列式，由(1.5.2)式得
$$\begin{aligned}D_n&=n!\ (2-1)(3-1)\cdots(n-1)\cdot\\ &\quad(3-2)(4-2)\cdots(n-2)\cdots[n-(n-1)]\\ &=n!\ (n-1)!\ (n-2)!\ \cdots 2!\ 1!\ .\end{aligned}$$

例 2[1.7(3)] 计算
$$\Delta_{n+1}=\begin{vmatrix}a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n\\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a-1 & \cdots & a-n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

解 为使 Δ_{n+1}中各列元素的方幂次数自上而下递升排列，将第 $n+1$ 行依次与上行交换直至第 1 行；第 n 行依次与上行交换直至第 2 行…；第 2 行交换到第 n 行，于是共经过

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n+1)/2$$

次行的交换，得到 n 阶范德蒙行列式

$$\Delta_{n+1}=(-1)^{n(n+1)/2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}.$$

再对上面右端行列式的列进行与上述行的相同调换，得到

$\Delta_{n+1}=(-1)^{n(n+1)/2}(-1)^{n(n+1)/2}\times$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a-n & a-(n-1) & \cdots & a-1 & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a-n)^{n-1} & [a-(n-1)]^{n-1} & \cdots & (a-1)^{n-1} & a^{n-1} \\ (a-n)^n & [a-(n-1)]^n & \cdots & (a-1)^n & a^n \end{vmatrix}.$$

令 $x_1=a-n, x_2=a-(n-1), \cdots, x_i=a-(n-i+1), \cdots,$

$x_j=a-(n-j+1), \cdots, x_n=a-1, x_{n+1}=a.$

注意到 $(-1)^{n(n+1)/2}\cdot(-1)^{n(n+1)/2}=1$，由(1.5.1)式得到

$$\begin{aligned}\Delta_{n+1}&=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)\\&=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}\{[a-(n-i+1)]-[a-(n-j+1)]\}\\&=\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(i-j)=\prod_{k=1}^{n}k!\ .\end{aligned}$$

法二 利用行列式性质，改变原行列式的元素，产生以新元素为行(列)元素的范德蒙行列式.

例 3 计算 $(n+1)$ 阶行列式

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix},$$

其中 $b_i\neq 0, a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n+1)$.

解 提取 D_{n+1}各行的公因式,得到

$$D_{n+1}=a_1^n a_2^n\cdots a_{n+1}^n\times \begin{vmatrix} 1 & (b_1/a_1) & (b_1/a_1)^2 & \cdots & (b_1/a_1)^n \\ 1 & (b_2/a_2) & (b_2/a_2)^2 & \cdots & (b_2/a_2)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & (b_{n+1}/a_{n+1}) & (b_{n+1}/a_{n+1})^2 & \cdots & (b_{n+1}/a_{n+1})^n \end{vmatrix}.$$

上面右端行列式是以新元素 $b_1/a_1, b_2/a_2,\cdots,b_{n+1}/a_{n+1}$为列元素的 $n+1$ 阶范德蒙行列式.由(1.5.2)式得到

$$D_{n+1}=\prod_{i=1}^{n}a_i^n\prod_{n+1\geqslant i>j\geqslant 1}(b_i/a_i-b_j/a_j).$$

法三 如 n 阶行列式 D_n 的第 i 行(列)由两个分行(列)所组成,其中任意相邻两行(列)均含有相同分行(列),且 D_n 中含有由 n 个分行(列)组成的范德蒙行列式,那么将 D_n 的第 i 行(列)乘以 -1 加到第 $i+1$ 行(列),消除一些分行(列),即可化成范德蒙行列式.

例 4 计算下列行列式:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & 1+\sin\varphi_3 & 1+\sin\varphi_4 \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3 & \sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4 \\ \sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1 & \sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2 & \sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3 & \sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4 \end{vmatrix}$$

解 在 Δ_4 的第 2 行中去掉与第 1 行成比例的分行,得到

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 & \sin\varphi_4 \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_3 & \sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4 \\ \sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1 & \sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2 & \sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3 & \sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4 \end{vmatrix}$$

在上行列式的第 3 行中去掉与第 2 行成比例的分行,得一新行列式.在此新行列式的第 4 行中去掉与第 3 行成比例的分行,得到

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ \sin\varphi_1&\sin\varphi_2&\sin\varphi_3&\sin\varphi_4\\ \sin^2\varphi_1&\sin^2\varphi_2&\sin^2\varphi_3&\sin^2\varphi_4\\ \sin^3\varphi_1&\sin^3\varphi_2&\sin^3\varphi_3&\sin^3\varphi_4\end{vmatrix}$$
$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 4}(\sin\varphi_i-\sin\varphi_j).$$

法四 各行(列)元素均为某一元素的不同方幂,但都缺少同一方幂的行列式,可用多种方法化成范德蒙行列式.下面仅介绍加边化法.

例 5[1.5(4)] 证明:

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\ x_1&x_2&x_3&x_4\\ x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2\\ x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4\end{vmatrix}=(x_1+x_2+x_3+x_4)\cdot$$
$$(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).$$

解 (1)当 x_1,x_2,x_3,x_4 有两个相等时,显然 $\Delta_4=0$;

(2)当 x_1,x_2,x_3,x_4 互异时,由于 Δ_4 中的各列元素均缺少 3 次方幂的元素,在 Δ_4 中添加 3 次幂的一行元素.为产生 5 阶范德蒙行列式,再适当添加一列得到

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\ x_1&x_2&x_3&x_4&x\\ x_1^2&x_2^2&x_3^2&x_4^2&x^2\\ x_1^3&x_2^3&x_3^3&x_4^3&x^3\\ x_1^4&x_2^4&x_3^4&x_4^4&x^4\end{vmatrix}.$$

按最后一列展开,得到

$$f(x)=1\cdot A_{15}+A_{25}x+A_{35}x^2+A_{45}x^3+A_{45}x^4.$$

因 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=f(x_4)=0$,故 x_1,x_2,x_3,x_4 为 $f(x)$的四个根,根据根与系数的关系,有 $x_1+x_2+x_3+x_4=-A_{45}/A_{55}$.而 $A_{45}=(-1)^{4+5}\Delta_4=-\Delta_4$, $A_{55}=(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-$

$x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3)$，所以

$$\begin{aligned}\Delta_4&=(x_1+x_2+x_3+x_4)A_{55}\\&=(x_1+x_2+x_3+x_4)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdot\\&\quad(x_2-x_3)(x_2-x_4)(x_3-x_4).\end{aligned}$$

注意 一般，仿上例之证法可得到

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&x_3^{n-2}&\cdots&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&x_3^n&\cdots&x_n^n\end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

法五 行列式中其他各行(列)都是元素的不同方幂，只有一行(列)的元素不是相应元素的零次幂(即该行(列)元素都不是1)，而是各行(列)元素的函数. 利用行列式性质，将这一行(列)元素化为全是1的元素.

例 6 试用范德蒙行列式计算下面行列式：

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$$

解 将 Δ_3 的第1行加到第3行上，得到

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

例 7 设 $a>b>c>0$，试用范德蒙行列式证明

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}<0.$$

解 将 Δ_3 的第 1 列乘以 $a+b+c$ 加到第 3 列，得到

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ab+bc+ca \\ b & b^2 & b^2+ab+bc+ca \\ c & c^2 & c^2+ab+bc+ca \end{vmatrix},$$

将第 2 列乘以 -1 加到第 3 列，提取公因式得

$$\begin{aligned}\Delta_3&=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}\\ &=(ab+bc+ca)(b-a)(c-a)(c-b)<0.\end{aligned}$$

习　题　1.5

试用范德蒙行列式的结果，计算下列行列式：

1. $D_4=\begin{vmatrix} a^3 & (a-1)^3 & (a-2)^3 & (a-3)^3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ a & a-1 & a-2 & a-3 \\ a^2 & (a-1)^2 & (a-2)^2 & (a-3)^3 \end{vmatrix}$.

2. $D_3=\begin{vmatrix} 1 & p & p^3 \\ 1 & q & q^3 \\ 1 & r & r^3 \end{vmatrix}$.

并证明 $D_3=0$ 的充要条件是 $p+q+r=0$，其中 p,q,r 为互异实数.

3. $\Delta_4=\begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^2b_1 & a_2^2b_2 & a_3^2b_3 & a_4^2b_4 \\ a_1b_1^2 & a_2b_2^2 & a_3b_3^2 & a_4b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{vmatrix}$.

4. $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$ $(a\neq0,b\neq0,c\neq0)$.

5. $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$.

6. $\Delta_n=\begin{vmatrix} \dfrac{x_1}{(x_1-1)} & \dfrac{x_2}{(x_2-1)} & \cdots & \dfrac{x_n}{(x_n-1)} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

§1.6 三对角线型行列式的算(证)法

三对角线型的行列式是指主对角线上元素与主对角线上方和下方第一条次对角线上元素不全为零而其余元素全为零的行列式. 如用两竖线表示行列式,用三斜线表示三对角线上不全为零的元素,那么这种行列式可形象地表示为

法一 化三角形法. 此法是将主对角线上方或下方第一条次对角线上元素全部消成零.

例 1 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$.

解 将 D_n 中主对角线下方的元素全部消成零.

$$D_n \xlongequal{r_2+(-1/2)r_1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+(-2/3)r_2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-3/4)r_3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n+1)/n \end{vmatrix} = n+1.$$

法二 第二数学归纳法. 下面介绍第二数学归纳法，然后举例说明它在三对角线型行列式证题中的应用.

有时用第一数学归纳法证明命题，仅用归纳假设“$n=k$ 时，命题成立”，还不能证明命题对 $n=k+1$ 也成立，它要求有更强的归纳假设“$n\leqslant k$ 时命题成立”，这就是第二数学归纳法.

第二数学归纳法：设有一个与自然数有关的命题，如果

1）当 $n=n_0$ 时，命题成立（n_0 为自然数，根据具体问题确定）；

2）设 $n\leqslant k$ 时，命题成立（这假设常称为归纳假设），证明 $n=k+1$ 时，命题也成立.

则命题对于大于或等于 n_0 的一切自然数 n 都成立.

应用第二数学归纳法证明三对角线型行列式 D_n 的等式时，第一步往往不难，难的是第二步. 而第二步证明的关键又在于灵活应用归纳假设，为此常按某一行（列）展开 D_n，求出 $k+1$ 阶行列式 D_{k+1}的递推式：

$$D_{k+1}=aD_k+bD_{k-1} \qquad (a,b \text{ 为常数}), \qquad (1.6.1)$$

其中 D_k,D_{k-1}分别为与 D_{k+1}同型（相同形式）的 k 阶，$k-1$ 阶行列式. 因三对角线型行列式的展开式(1.6.1)是联系三个相邻阶行列式的等式，故可用第二数学归纳法证明三对角线型行列式等式.

例 2 用数学归纳法证明

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(n\times n)} =\cos n\alpha.$$

证 令左端行列式为 D_n. 将 D_{k+1}展为三个相邻阶行列式之和，即展为(1.6.1)式，用第二数学归纳法证之.

当 $n=2$ 时，取左上角的 2 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} =2\cos\alpha^2-1=\cos 2\alpha.$$

结论成立. 注意，这里不取右下角的 2 阶行列式，是因为该行列式不包含反映 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$结构特征的元素 $\cos\alpha$. 事实上，它的值也不等于 $\cos 2\alpha$.

假设对阶数小于和等于 k 的行列式结论成立. 下证对 $k+1$ 阶行列式结论也成立. 为得到展开式(1.6.1)，按最后一行展开

D_{k+1}，得到

$$D_{k+1}=1\cdot(-1)^{k+1+k}\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(k\times k)}$$

$$+2\cos\alpha\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(k\times k)}$$

$$=2\cos\alpha\cdot D_k-D_{k-1}.$$

由第二数学归纳法的归纳假设得到

$$D_{k-1}=\cos(k-1)\alpha, D_k=\cos k\alpha.$$

由

$$D_{k-1}=\cos(k-1)\alpha=\cos(k\alpha-\alpha)$$
$$=\cos k\alpha\cos\alpha+\sin k\alpha\sin\alpha.$$

得到

$$D_{k+1}=2\cos\alpha\cos k\alpha-(\cos k\alpha\cos\alpha+\sin k\alpha\sin\alpha)$$
$$=\cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha=\cos(k+1)\alpha.$$

由第二数学归纳法可知，对一切大于或等于 1 的自然数，命题成立. 证毕.

值得注意的是：为了将 D_{k+1}展开成用其同型的 D_k, D_{k-1}表示，上例必须按第 n 行（或第 n 列）展开，不能按第 1 行或第 1 列展开，否则所得到的低阶行列式不是与 D_{k+1}同型的行列式.

法三 递推法. 除个别的行（列）外，各行（列）所含元素结构形式相同的三对角线型行列式可使用递推法计算. 先用展开或拆项等方法，将原行列式表成两个低阶同型行列式的线性关系式. 再用递推法及某些低阶（常是 2 阶和 1 阶）行列式的值求出仅用一个相邻阶的行列式表示原行列式的关系式，在此基础上用递推法求出或证明所需结果.

例3 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}.$$

解法一 按第 n 列展开 D_n，用两个低阶同型行列式表示之：

$$D_n=(1-a_n)D_{n-1}+a_nD_{n-2}.$$

使用递推法及 D_1 与 D_2 的值，进一步求出仅用 D_{n-1} 表示 D_n 的式子. 事实上，因

$$D_n-D_{n-1}=-a_n(D_{n-1}-D_{n-2});$$

$$D_{n-1}-D_{n-2}=-a_{n-1}(D_{n-2}-D_{n-3})\cdots;$$

故 $$D_n-D_{n-1}=(-a_n)(-a_{n-1})(D_{n-2}-D_{n-3})=\cdots$$
$$=(-1)^{n-2}a_na_{n-1}\cdots a_4a_3(D_2-D_1).$$

因 $$D_1=1-a_1,\quad D_2=1-a_1+a_1a_2,$$

故 $$D_n=D_{n-1}+(-1)^na_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1. \tag{1.6.2}$$

在(1.6.2)式的基础上，再利用递推法及低阶(2 阶)行列式的值，最后求出 D_n. 事实上

$$D_{n-1}=D_{n-2}+(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_{n-1},$$
$$D_{n-2}=D_{n-3}+(-1)^{n-2}a_1a_2\cdots a_{n-2}\cdots,$$
$$D_3=D_2+(-1)^3a_1a_2a_3,$$
$$D_2=1+(-1)a_1+(-1)^2a_1a_2,$$

故 $$D_3=1+(-1)a_1+(-1)^2a_1a_2+(-1)^3a_1a_2a_3,$$
$$D_4=1+(-1)a_1+(-1)^2a_1a_2+(-1)^3a_1a_2a_3+$$
$$(-1)^4a_1a_2a_3a_4\cdots,$$
$$D_n=1+(-1)a_1+(-1)^2a_1a_2+\cdots+(-1)^na_1a_2\cdots a_n.$$

解法二 将 D_n 的最后一列折成两列：$[0,0,\cdots,0,1]^T$ 与 $[0,0,0,\cdots,0,a_n,-a_n]^T$，从而 D_n 折成两个 n 阶行列式 Δ_1 与 Δ_2 之和.

按第 n 列展开 Δ_1 得 $\Delta_1=D_{n-1}$. 自最后一行开始，每行依次与前一行相加将 Δ_2 化为三角形行列式，其值为 $(-1)^n a_1 a_2\cdots a_n$. 从而 $D_n=D_{n-1}+(-1)^n a_1\cdots a_n$，再仿解法一解之.

例 4[1996 年 5] 计算下列 5 阶行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解 $$D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -a \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

将右端第一个行列式的最后一行开始往上一行相加其值为 $(-1)^5a^5$，将第二个行列式按最后一列展开，于是得到

$$D_5=(-1)^5a^5+D_4.$$

同法可得 $D_4=(-1)^4a^4+D_3$，$D_3=(-1)^3a^3+D_2$，

$$D_2=(-1)^2a^2+D_1=a^2+(1-a),$$

故 $$D_5=1-a+a^2-a^3+a^4-a^5.$$

例 5 计算 $$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

解 将 D_n 按第 1 行展开，得到用 D_{n-1}，D_{n-2}表示 D_n 的式子：

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$

用递推法及 D_2，D_1 之值求出仅用 D_{n-1}表示 D_n 的式子. 事实上，由

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

递推下去，得到 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$. 又由 $D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$，$D_1=\alpha+\beta$，有

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n. \tag{1.6.3}$$

利用上式及 D_2，D_1 的值，再用递推法，仿上例即可求出 D_n. 但下面利用 D_n 的对称性求之. 考虑到 D_n 的对称性：即在 D_n 中将 α 换成 β，β 换成 α 时，D_n 不变，于是由(1.6.3)式有

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n. \tag{1.6.4}$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时，将(1.6.3)、(1.6.4)式两端分别乘以 β、α，然后相减得到

$$\begin{aligned}D_n&=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})/(\alpha+\beta)\\&=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}\beta^n\quad(\alpha\neq\beta).\end{aligned} \tag{1.6.5}$$

当 $\alpha=\beta$ 时，对(1.6.3)式使用递推法得到

$$D_n=\beta^n+\beta[\beta^{n-1}+\beta D_{n-2}]=2\beta^n+\beta^2D_{n-2}=\cdots=(n-2)\beta^n+\beta^{n-2}D_2.$$

由 $D_2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$ 及 $\alpha=\beta$ 得到

$$D_n=(n-2)\beta^n+\beta^{n-2}\cdot 3\beta^2=(n+1)\beta^n. \tag{1.6.6}$$

例 6 设 $D_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$. 证明 D_1，$D_2\cdots$，D_n 是等差数列.

证 显然有 $D_1=2$，$D_2=3$，$D_3=4$. 设 $D_k=k+1$，下证 $D_{k+1}=k+2$. 将 D_{k+1}按第 $k+1$ 行展开得到

$$D_{k+1}=2D_k-1\cdot\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\\0&0&0&\cdots&2&1&0\\0&0&0&\cdots&1&2&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{vmatrix}_{k\times k}$$

$$=2D_k-D_{k-1}=2(k+1)-k=k+2.$$

于是对任意自然数 n，有 $D_n=n+1$，因而 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 为等差数列.

习　题 1.6

计算下列 n 阶行列式：

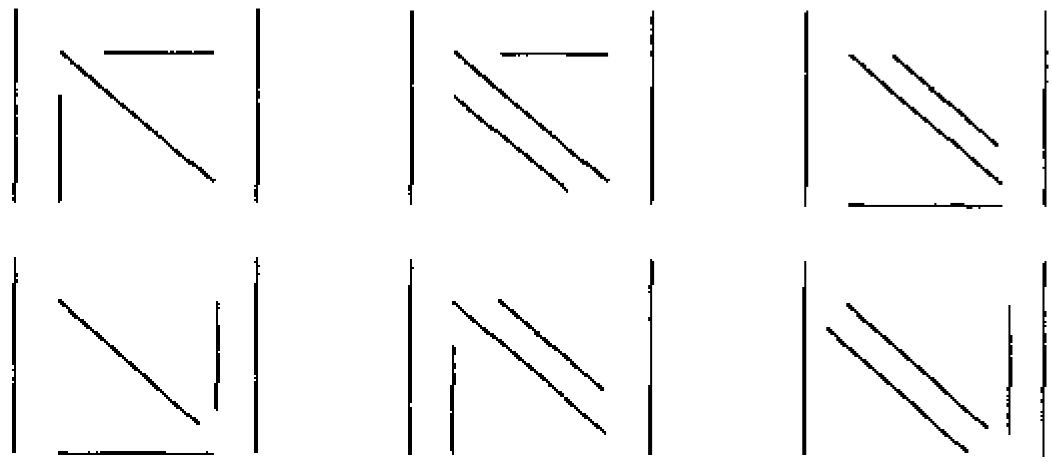
1. $\Delta_n=\begin{vmatrix}2\cos\alpha&1&0&\cdots&0&0\\1&2\cos\alpha&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&2\cos\alpha&1\\0&0&0&\cdots&1&2\cos\alpha\end{vmatrix}$；

2. $D_n=\begin{vmatrix}9&5&0&0&\cdots&0&0&0\\4&9&5&0&\cdots&0&0&0\\0&4&9&5&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&4&9&5\\0&0&0&0&\cdots&0&4&9\end{vmatrix}$.

§1.7　三对角线型变形行列式的算(证)法

下面几种行列式可视为三对角线型行列式的变形行列式，简

称为三对角线型变形行列式：



下面讨论它们的算(证)法.

方法一 化三角形行列式法.利用行列式性质,化成上(下)三角形行列式.

例1 计算 $D=\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ c_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

解 当 $a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$时,将新行列式的第 $i+1$ 列乘以 $-(c_i/a_i)(i=1,2,\cdots,n)$后都加到第1列,得三角形行列式:

$$D=\begin{vmatrix} a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_ib_i}{a_i}\right).$$

当 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时,显然,$D=0$.

注意 上例中 D 称为爪型行列式,也称为箭型行列式.其他的爪型行列式 , , ,均可仿上例求出其值,有一些行

列式采用加边等方法可化为上例中爪型行列式．如 $a_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，可直接利用上例结果：

$$D=da_1a_2\cdots a_n=\left[a_0-\sum_{i=1}^{n}(c_ib_i/a_i)\right]\prod_{j=1}^{n}a_j(a_i\neq 0)\quad(1.7.1)$$

计算，其中 $d=\left[a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{c_ib_i}{a_i}\right]$，其和式中的各项是将爪型行列式关于主对角线对称的两元素 b_i 与 c_i 相乘，然后除以主对角线上的对应元素 a_i 而得到．

例 2 证明 $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1}$.

证 设等式左端行列式为 D_n. 如将 D_n 中与主对角线平行的第一条次对角线上 $n-1$ 个元素(-1)化为 0，则 D_n 就变为三角形行列式，但这样做会出现分式，计算比较麻烦. 如将(-1)下边的 $n-1$ 个主对角元 x 化为 0，D_n 也可变为三角形行列式，这样计算较简. 事实上

$$D_n=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2+a_1x+a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}=\cdots$$

$$=\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ a_0x^2+a_1x+a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0x^{n-2}+a_1x^{n-3}+\cdots+a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_0x+a_1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum\limits_{i=0}^{n-2}a_ix^{n-2-i} & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^{n-i-1}.$$

方法二 第一数学归纳法. 因 $k+1$ 阶三对角线型变形行列式按某行(列)展开后，可得递推式

$$D_{k+1}=cD_k+d(c,d\text{ 为常数}). \tag{1.7.2}$$

其中 D_k 为与 D_{k+1} 同型的 k 阶行列式，可用第一数学归纳法证其行列式等式.

例 3 用数学归纳法证明

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\ (n\geqslant 2).$$

证 令左端行列式为 Δ_n. 它是三对角线型变形行列式，可展为 (1.7.2)式，因而可用第一数学归纳法证之.

当 $n=2$ 时，取 Δ_n 的右下角 2 阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} x & a_0 \\ -1 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2+a_1x+a_0,$$

结论成立.

假设命题对 Δ_k 成立,下证对 Δ_{k+1}也成立.

如何展开 Δ_{k+1},使其展开式中出现 Δ_k?

首先注意 Δ_{k+1},Δ_k 的相同结构特征体现在其右下角元素及其排列上,为保持这些特征,应将 Δ_{k+1}按第 1 行(列)展开:

$$\Delta_{k+1} = x\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_{k-1} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_k \end{vmatrix}$$

$$+a_0(-1)^{1+k+1}\begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\Delta_k + a_0(-1)^{k+2}(-1)^k = x\Delta_k + a_0.$$

值得注意的是如何正确写出 Δ_k? 由

$$\Delta_n = x^n + (a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1})$$

的右端括号中多项式系数与 Δ_n 最后一列元素的关系及 Δ_k 最后一列的元素,即可写出

$$\Delta_k = x^k + (a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots+a_kx^{k-1}),$$

于是 $\qquad \Delta_{k+1} = x\Delta_k + a_0 = x^{k+1}+a_kx^k+\cdots+a_1x+a_0.$

由第一数学归纳法可知,对一切 $n\geqslant 2$ 的自然数命题成立.

方法三 递推归纳法.其步骤为

(i) 令 $n=1,2,3,\cdots$,求出 $D_1,D_2,D_3,\cdots$;

(ii) 递推求出 D_n 的表示式;

(iii) 用数学归纳法证明 D_n 表示式的正确性.

例 4 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-2} & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

解 用递推归纳法求之. 因 $D_1=x_1+a_1=x_1(1+a_1/x_1)$,

$$D_2=\begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 \\ -x_1 & x_2 \end{vmatrix}=x_1x_2(1+a_1/x_1+a_2/x_2).$$

归纳推得 $D_n=x_1x_2\cdots x_n(1+a_1/x_1+a_2/x_2+\cdots+a_n/x_n)$.

用数学归纳法证明上式成立. 设 $k=n-1$ 时结论成立,即

$$D_{n-1}=\prod_{j=1}^{n-1}x_j(1+a_1/x_1+a_2/x_2+\cdots+a_{n-1}/x_{n-1}),$$

往证 $k=n$ 时结论也成立. 按第 n 列展开,得

$$\begin{aligned} D_n &=x_nD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_{n-1}) \\ &=x_nD_{n-1}+(-1)^{1+n}(-1)^{n-1}a_nx_1x_2\cdots x_{n-1} \\ &=x_n[x_1x_2\cdots x_{n-1}(1+a_1/x_1+a_2/x_2+\cdots+a_{n-1}/x_{n-1})] \\ &\quad +a_nx_1\cdots x_{n-1} \\ &=x_1x_2\cdots x_n(1+a_1/x_1+a_2/x_2+\cdots+a_n/x_n). \end{aligned}$$

即当 $k=n$ 时结论也成立,故对一切自然数结论成立.

方法四 展开法. 三对角线型变形行列式至少有一行(第 1 行或最后一行)或一列(第 1 列或最后一列)的元素不全为零,且其对应的代数余子式为或可化为三角形行列式,因而可按某一行(或列)展开求其值.

例 5[1.5(5)] 证明

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^n+\sum_{i=1}^{n}a_ix^{n-i}.$$

证明一 记等式左端行列式为 Δ_n，按最后一行展开 Δ_n，得

$$\Delta_n=(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \\ & & & & & x \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+n-1}a_2\begin{vmatrix} x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & 0 \\ & & & & & -1 \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & & & & & \\ 0 & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & & & & & \\ x & -1 & & & & \\ & x & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & -1 & \\ & & & & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证明二 按第 1 列展开，得

$$\Delta_n=x\cdot\Delta_{n-1}+(-1)^{1+n}a_n\cdot(-1)^{n-1}=x\Delta_{n-1}+a_n.$$

递推得到

$$\Delta_{n-1}=x\Delta_{n-2}+a_{n-1},\cdots,\Delta_3=x\Delta_2+a_3,$$

$$\Delta_2=x\Delta_1+a_2=x^2+a_1x+a_2.$$

依次将上述各式代入，得

$$\Delta_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

证明三 用第一数学归纳法证之.

$n=1$ 时，$\Delta_1=x_1+a$，$n=2$ 时，$\Delta_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & a_1+x \end{vmatrix}=x^2a_1x+a_2$，
命题成立.

归纳假设 $n=k-1$ 时，命题结论成立，即

$$\Delta_{k-1}=x^{k-1}+a_1x^{(k-1)-1}+a_2x^{(k-1)-2}+\cdots+a_{k-2}x+a_{k-1}.$$

下证 $n=k$ 时，命题也成立. 事实上，按第 1 列将 Δ_k 展开，得

$$\Delta_k=x\Delta_{k-1}+a_k=x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-2}x^2+a_{k-1}x+a_k.$$

由第一数学归纳法原理知，命题对任意正整数 n 成立.

证明四 将 Δ_k 化为三角形行列式

(i) 当 $x=0$ 时，易求得 $\Delta_n=a_n$.

(ii) 当 $x\neq0$ 时，可化为上或下三角形行列式：

$$\Delta_n\xlongequal{r_n+\left(-\frac{a_n}{x}\right)r_1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & a_{n-1}+(a_n/x) & a_{n-2} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_n+\left[-\left(\frac{a_{n-1}+\frac{a_n}{x}}{x}\right)\right]r_2}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & [a_{n-1}+a_n/x]/x+a_{n-2} & \cdots & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots\xlongequal{r_n+kr_{n-1}}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+a_1+(a_2/x)+\cdots+(a_n/x^{n-1}) \end{vmatrix}$$

$$=x^{n-1}[x+a_1+(a_2/x)+(a_3/x^2)+\cdots+(a_n/x^{n-1})]$$

$=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,

其中 $k=-[a_2+(a_3/x)+\cdots+(a_n/x^{n-2})]/x$.

证明五 将 Δ_n 的第 1 列化成除第 n 个元素外，其余元素全为零的一列，为此将第 i 列乘以 x^{i-1}，并全部加到第 1 列上($i=2,3,\cdots,n$)；或者自最后一列开始，每列都乘 x 往前一列相加，则第 1 列除最后一个元素为 $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 外，其余元素全为零，按第 1 列展开，例得证.

习　　题 1.7

1. 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a-1 & -a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-1 & -1 \end{vmatrix}$.

2. 证明 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}=-\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$.

§1.8　主对角线上方和下方元素都相同或分别相同的行列式算法

(一)主对角线两旁元素完全相同，且主对角线上的元素也完全相同的行列式算法.

此类行列式算法较多，有化三角形法、加边法、递推法等.

例 1[1.7(2)]　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解法一 D_n 的各列之和相等，将各行加到第 1 行，提取公因式，得到

$$D_n=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+(-a)r_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

解法二 将 D_n 化成爪型行列式：

$$D_n\xlongequal[\substack{i=2,3,\cdots,n\\(x\neq a)}]{r_i+(-1)r_1}\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a-x & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-x & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a-x & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}.\begin{pmatrix}\text{爪型}\\\text{行列式}\end{pmatrix}$$

由(1.7.1)式得到

$$D_n=\left[x-\frac{a(a-x)}{x-a}(n-1)\right](x-a)^{n-1}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

当 $x=a$ 时，上式也成立，故总有 $D_n=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$.

解法三 将 D_n 加边成下列 $n+1$ 阶行列式，再化成爪型行列式：

$$D_{n+1}=D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{i=2,3,\cdots,n\\(x\neq a)}]{r_i+(-1)r_1}\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ -1 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}.$$

当 $x=a$ 时，$D_n=0$，上述结论也成立.

解法四 为求出 D_n 的递推关系式，先将 D_n 的某一列(行)拆成为两个分列(行)，从而将 D_n 拆分为两行列式之和. 由 $x=(x-a)+a$ 易得到

$$D_n=\begin{vmatrix}(x-a)+a & a & \cdots & a\\ 0+a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0+a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x-a & a & \cdots & a\\ 0 & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a & \cdots & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)\begin{vmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a & a & \cdots & x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x-a)D_{n-1}+a(x-a)^{n-1}.$$

同法可得 $D_{n-1}=(x-a)D_{n-2}+a(x-a)^{n-2}$，于是

$$\begin{aligned}D_n&=(x-a)[(x-a)D_{n-2}+a(x-a)^{n-2}]+a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^2D_{n-2}+2a(x-a)^{n-1}.\end{aligned}$$

如此继续下去，可得

$$\begin{aligned}D_n&=(x-a)^3D_{n-3}+3a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^4D_{n-4}+4a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-2}D_2+(n-2)a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-2}(x^2-a^2)+(n-2)a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-1}[x+a+(n-2)a]\\&=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].\end{aligned}$$

或 $$\begin{aligned}D_n&=(x-a)^{n-1}D_1+(n-1)a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-1}x+(n-1)a(x-a)^{n-1}\\&=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].\end{aligned}$$

例 2[1.7(6)] 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解法一 用递推法求之. D_n 的主对角线上 n 个元素为有序的 n 个元,为求 D_n 与 D_{n-1}的递推式,将第 n 列拆分为两个分列:

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1+0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1+0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}.$$

同法可得 $D_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-2}$,故

$$D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+a_na_{n-1}D_{n-2}.$$

如此继续下去,得到

$$D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+a_1a_2a_4\cdots a_n+$$

$$
\begin{aligned}
&a_na_{n-1}\cdots a_4a_3D_2\\
=&a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+a_1a_2a_4\cdots a_n+\\
&a_na_{n-1}\cdots a_4a_3(a_1+a_2+a_1a_2)\\
=&a_1a_2\cdots a_n+(a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+\\
&a_1a_3a_4\cdots a_n+a_2a_3\cdots a_n)
\end{aligned}
$$

右端有 $n+1$ 项，其中有 n 项分别缺一因子 $a_i, i=n, n-1, \cdots, 1$).

当 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$ 时，

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n(1+1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n).$$

解法二 将 D_n 加边成下列 $n+1$ 阶行列式，化成爪型行列式：

$$
D_n=\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\
0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n
\end{vmatrix}
\xlongequal[\substack{i=2,3,\cdots,n\\(a_i\neq 0)}]{r_i+(-1)r_1}
\begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\
-1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\
-1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-1 & 0 & 0 & \cdots & a_n
\end{vmatrix}.
$$

由(1.7.1)式即得

$$D_n=\left[1+\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)\right]a_1a_2\cdots a_n \quad (a_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n).$$

当 $a_i=0(i=1,2,\cdots,n)$时，显然有 $D_n=0$，上式也成立.

解法三 利用行列式性质直接将它化成爪型行列式：

$$
D_n\xlongequal[\substack{i=2,3,\cdots,n\\(a_i\neq 0)}]{r_i+(-1)r_1}
\begin{vmatrix}
1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
-a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0\\
-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n
\end{vmatrix}.
$$

由(1.7.1)式即得

$$D_n=\left[1+a_1-\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{-a_1}{a_i}\right)\right]\prod_{i=2}^{n}a_i=\left[1+a_1+a_1\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]\prod_{i=2}^{n}a_i$$

$$=a_1\left(1+\frac{1}{a_1}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=2}^{n}a_i=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

解法四 利用行列式性质，将 D_n 化成行和相等的行列式.

因 $a_i\neq0(i=1,2,\cdots,n)$，将第 i 列除以 a_i 得到

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}1+(1/a_1) & 1/a_2 & \cdots & 1/a_n\\ 1/a_1 & 1+(1/a_2) & \cdots & 1/a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1/a_1 & 1/a_2 & \cdots & 1+(1/a_n)\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}a_1a_2\cdots a_n\cdot\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}(1/a_i) & 1/a_2 & \cdots & 1/a_n\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}(1/a_i) & 1+(1/a_2) & \cdots & 1/a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+\sum\limits_{i=1}^{n}(1/a_i) & 1/a_2 & \cdots & 1+(1/a_n)\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\left[1+\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)\right]\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{j=1}^{n}a_j\left[1+\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)\right].$$

(二)主对角线上方和下方元素分别相同但主对角线上的元素彼此互异的行列式算法

可用解方程组的方法求之，为此先将所给行列式 D_n 拆分为

两个行列式之和，求出用 D_{n-1} 表示 D_n 的式子，然后利用 $D_n=D_n^{\mathrm{T}}$，求出另一个用 D_{n-1} 表示 D_n 的式子，将此两式联立，消去 D_{n-1}，即可求出 D_n. 此法与主对角线上的元素是否完全相同无关.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & x_{n-1} & \alpha \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}.$$

解 因 D_n 的主对角线上的 n 个元素是有序的 n 个元，将 D_n 的第 n 列拆分为两个分列之和，为此将 x_n 改写成 $x_n=(x_n-\alpha)+\alpha$，于是 D_n 拆分为两行列式之和：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n-\alpha \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha \\ \beta & x_2 & \cdots & \alpha & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\begin{vmatrix} x_1-\beta & \alpha-\beta & \alpha-\beta & \cdots & \alpha-\beta & 1 \\ 0 & x_2-\beta & \alpha-\beta & \cdots & \alpha-\beta & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-\beta) \qquad (1.8.1)$$

因 $D_n^{\mathrm{T}}=D_n$，将上式中 α 换成 β，β 换成 α，得到

$$D_n=(x_n-\beta)D_{n-1}+\beta\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-\alpha) \qquad (1.8.2)$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时，(1.8.1)式 $\times(x_n-\beta)-$(1.8.2)式 $\times(x_n-\alpha)$ 得到

$$D_n=\left[\alpha\prod_{i=1}^{n}(x_i-\beta)-\beta\prod_{i=1}^{n}(x_i-\alpha)\right]\Big/(\alpha-\beta).$$

当 $\alpha=\beta$ 时，仿例 2 解法三的方法易得到

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+\sum\limits_{i=2}^{n}\beta(x_1-\beta)/(x_i-\beta) & \beta & \cdots & \beta & \beta \\ 0 & x_2-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-\beta & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x_n-\beta \end{vmatrix}$$

$$=(x_2-\beta)(x_3-\beta)\cdots(x_n-\beta)\left[x_1+\beta(x_1-\beta)\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i-\beta}\right)\right]$$

$$=(x_1-\beta)(x_2-\beta)\cdots(x_n-\beta)\left[\frac{x_1}{x_1-\beta}+\beta\left(\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{x_i-\beta}\right)\right]$$

$$=\prod_{j=1}^{n}(x_j-\beta)\left[1+\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i-\beta}\right)\right]$$

$\left(\text{最后的等号成立是因为}\dfrac{x_1}{x_1-\beta}=\dfrac{x_1-\beta}{x_1-\beta}+\dfrac{\beta}{x_1-\beta}=1+\dfrac{\beta}{x_1-\beta}\right).$

习　　题 1.8

计算下列 n 阶行列式：

1. $D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$；

2. $\Delta_n=\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & a+x_n \end{vmatrix}$；

3. $D_4=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$

§1.9 可使用加边法计算的一类行列式

把行列式添加一行和一列，使升阶后的行列式的值保持不变，这种计算行列式的方法称为加边法．下面介绍可使用加边法计算的一类行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_{n-1} & b_1a_n \\ b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_{n-1} & b_2a_n \\ b_3a_1 & b_3a_2 & \cdots & b_3a_{n-1} & b_3a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_{n-1} & x_n \end{vmatrix}.$$

D_n 的结构特征是除主对角线上的元素外，第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 行的元素分别是 $n-1$ 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n$ 的倍元，即

$$b_ia_1,b_ia_2,\cdots,b_ia_{i-1},b_ia_{i+1},\cdots,b_ia_n.$$

因面，可这样加边计算：添加的第 1 行元素依次取为 $1,a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots,a_n$，第 1 列元素依次取为 $1,0,\cdots,0$，即

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_{n-1} & b_1a_n \\ 0 & b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_{n-1} & b_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_{n-1} & x_n \end{vmatrix}. \tag{1.9.1}$$

D_n 也可看成除主对角线上的元素外，第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 列的元素分别是 $n-1$ 个元素 $b_1,b_2,\cdots,b_{i-1},b_{i+1},\cdots,b_n$ 的倍元，即为

$$b_1a_i,b_2a_i,\cdots,b_{i-1}a_i,b_{i+1}a_i,\cdots,b_na_i.$$

因而，也可这样加边计算：添加的第 1 列元素依次取为 $1,b_1,b_2,\cdots,b_{i-1},b_i,b_{i+1},\cdots,b_n$，而第 1 行元素依次取为 $1,0,\cdots,0$，即

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ b_1 & x_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_{n-1} & b_1a_n\\ b_2 & b_2a_1 & x_2 & \cdots & b_2a_{n-1} & b_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_{n-1} & x_n\end{vmatrix}. \tag{1.9.2}$$

如何计算(1.9.1)和(1.9.2)式右端行列式？一般先利用行列式性质将它们化成§1.7 例 1 中的爪型行列式，然后直接利用(1.7.1)式写出结果．

例 1 计算下列行列式，其中 λ 为常数

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_na_1 & a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}.$$

解 因 $|\lambda E-A|$ 的第 i 行 $(i=1,2,\cdots,n)$ 元素除主对角线上元素外，分别是 $n-1$ 个元 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n$ 的倍元，即为

$$(-a_i)a_1,(-a_i)a_2,\cdots,(-a_i)a_{i-1},(-a_i)a_{i+1},\cdots,(-a_i)a_n$$

因而可按(1.9.1)式加边计算，化成爪型行列式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & -a_na_1 & a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n]{r_{i+1}+a_ir_1}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}.$$

直接利用(1.7.1)式写出其结果为

$$|\lambda E-A|=\lambda^n\left[1-\sum_{i=1}^{n}(a_i^2/\lambda)\right]=\lambda^{n-1}\left[\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right](\lambda\neq 0).$$

当 $\lambda=0$ 时，如 $n\geqslant 2$，$|\lambda E-A|$ 中各行成比例，$|A|=0$；

当 $\lambda=0$ 时，如 $n=1$，则 $|A|=-a_1^2$. 因此，上式也成立.

于是无论 $\lambda=0$ 与 $\lambda\neq 0$ 都有

$$|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}\left(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$

加边法也常用来计算除主对角线上的元素外，各行(列)元素分别都相同的行列式，或各行(列)对应元素分别都相同的行列式.

例 2 计算 $\begin{vmatrix} a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$ $(\lambda_i\neq 0)$.

解法一 设上行列式为 D_n，显然 D_n 中除主对角线上元素外，各列元素都分别相同，可用加边法计算. 又各列元素除主对角线上的元素外分别为 1，1，…，1 的倍元，故可按(1.9.2)式加边计算：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}.$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\left(1+\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda_j^{-1}\right).$$

解法二 D_n 可看成除主对角线上元素外，各行的对应元素分别都相同的行列式，因而各行元素分别为 $a_1,\cdots,a_{i-1},a_{i+1},\cdots,a_n$ 的倍元(1 倍)，于是也可加边计算如下：

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1+\lambda_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & a_2+\lambda_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n+\lambda_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\left(1+\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda_j^{-1}\right).$$

习　　题 1.9

用加边法计算下列行列式：

1. $\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 2+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & n+a_n^2 \end{vmatrix}$； 2. $\begin{vmatrix} a_1 & y & \cdots & y \\ y & a_2 & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & a_n \end{vmatrix}$.

§1.10 相邻两行(列)主对角线上(下)方的对应元素相差 1 的行列式算法

以数字 $1,2,\cdots,n$ 为(大部分)元素，且相邻两行(列)主对角线上(下)方的对应元素相差 1 的 n 阶行列式可如下计算.

利用行列式的性质，可按下列方法化为主对角线上(下)方全为 1 的行列式：

自第 1 行(列)开始，前行(列)减去后行(列)；或自第 n 行(列)开始后行(列)减去前行.

如果非零元素 1 全位于主对角线的上方，应考察第 1 列(或第 n 行)元素与其他各列(或各行)主对角线上方对应元素成比例的

关系，化成下三角行列式.

如果非零元素 1 全在主对角线的下方，应考察第 1 行(或第 n 列)元素与其他各行(或各列)主对角线下方对应元素成比例的关系，化成上三角行列式.

例 1[1.7(5)] 计算 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=|i-j|$.

解法一 由 $a_{ij}=|i-j|$ 得到

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & n-5 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

自 D_n 的第 1 行起前行减去后行，得其主对角线上方全是 1 的 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

从第二列开始，每列都加上第一列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ n-1 & 2n-3 & 2n-4 & \cdots & n & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

解法二 自第 n 行起,后行减去前行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

从第 1 列至第 $n-1$ 列,每列都加上第 n 列,得

$$D_n=\begin{vmatrix} n-1 & n & n+1 & \cdots & 2n-3 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

解法三 自第 n 列开始,后列减去前列,得

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-2 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

从第一行至第 $n-1$ 行,每行加上第 n 行,得

$$D_n=\begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2n-3 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 0 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

解法四 自第 1 列起后列减去前列，得

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & n-3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

从第 2 行起，每行加上第 1 行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \cdots & -2 & 2n-4 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}.$$

例 2 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ a & a & 1 & \cdots & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & 2 \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$

解 自第 1 行开始，后行减去前行，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1 \\ a & a & a & \cdots & a & 1 \end{vmatrix},$$

其主对角线上方元素虽然都是 1，但第 n 行（或第 1 列）的元素都不与其他各行（或各列）主对角线上方的对应元素成比例，因此将

D_n 中第 n 行、第 n 列的元素拆成 $1=a+(1-a)$，从而 D_n 拆成两个 n 阶行列式之和：

$$D_n=\begin{vmatrix}1-a & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1\\ a & a & \cdots & a & a\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1-a & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-a & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1-a & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-a\end{vmatrix}.$$

设上式右端两行列式分别为 D_1 与 D_2，显然 $D_2=(1-a)^n$. 提取 D_1 中第 n 行的公因式 a，然后将第 1 至第 $n-1$ 行减去第 n 行得

$$D_1=(-1)^{n-1}a^n=(-1)^{n+1}a^n,$$

故 $$D_n=D_1+D_2=(-1)^n[(a-1)^n-a^n].$$ 解毕

对于本节所讨论的这类行列式，如果各行元素的和相同，应先把各列加到第 1 列，提取公因式，化成次对角线（自右上角到左下角的一条对角线）下（或上）方全是 1 的行列式，进一步还可化为次对角线上（或下）方全是零的行列式，利用(1.2.1)式求出结果.

例 3 计算 $$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}.$$

解 各列都加在第 1 列上，并提出公因子，得

$$\Delta_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&3&4&\cdots&n&1\\1&4&5&\cdots&1&2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}.$$

从第 n 行起后行减去前行，得

$$\Delta_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&1&1&\cdots&1-n\\0&1&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&1-n&\cdots&1\\0&1-n&1&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1-n\\1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1-n&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{c_1+c_i}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&1&\cdots&1&1-n\\-1&1&\cdots&1-n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&1-n&\cdots&1&1\\-1&1&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&-n\\-1&0&\cdots&-n&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&-n&\cdots&0&0\\-1&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}\text{（去掉与第 1 列成比例的分列）}$$

$=(-1)^{n-1}(-1)^{(n-1)(n-2)/2}n^{n-2}n(n+1)/2$［见(1.2.1)式］

$=(-1)^{n(n-1)/2}n^{n-1}(n+1)/2.$

习　题　1.10

1. 计算 $\Delta_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$，其中 $a_{ij}=\max\{i,n-j+1\}$.

§1.11　克莱姆法则的应用

设方程个数和未知数个数相等的非齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2; \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \text{即 } AX=\boldsymbol{b} \quad (1.11.1)$$

其对应的齐次线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0; \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases} \text{即 } AX=\boldsymbol{0}, \quad (1.11.2)$$

其中 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$.

应用一　求解非齐次线性方程组(1.11.1).

对于系数行列式 D 有明显特征的非齐次线性方程组，要准确迅速地算出 D 及 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$，从而求出所求的解.

这里讲的 D 有明显特征，含义是 D 和 D_i 易于算出.

例 1[1.8(2)]　用克莱姆法则解下列方程组

$$\begin{cases}5x_1+6x_2 & =0;\\ x_1+5x_2+6x_3 & =0;\\ x_2+5x_3+6x_4 & =0;\\ x_3+5x_4+6x_5 & =0;\\ x_4+5x_5 & =1.\end{cases}$$

解 $D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_1}-\begin{vmatrix}1&5&6&0&0\\5&6&0&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2+(-5)r_1}-\begin{vmatrix}1&5&6&0&0\\0&-19&-30&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{vmatrix}1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&-19&-30&0&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+(19)r_2}\begin{vmatrix}1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&65&114&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4\leftrightarrow r_3}\cdots\xlongequal{r_4+(-65)r_3}\cdots=65.$$

同法可求得 $D_1=1507, D_2=1145, D_3=703, D_4=395, D_5=212$.

由 $x_i=D_i/D(i=1,2,3,4,5)$得到：

$$x_1=1507/665, x_2=-1145/665,$$
$$x_3=703/665, x_4=-395/665, x_5=212/665.$$

例 2[1996 年 4] 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}, \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$$

其中 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，求线性方程组 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的解.

解 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$，即 $\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \cdots\\ 1\end{bmatrix}$.

因其系数行列式 D 为 n 阶范德蒙行列式的转置行列式，由 $a_i\neq a_j$ $(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 可知 $D=|A^{\mathrm{T}}|\neq 0$，从而上方程组有唯一解，又易求出（观察出）

$$D_1=D, D_2=D_3=\cdots=D_n=0,$$

故 $\qquad x_1=D_1/D=1, x_i=D_i/D=0(i=2,3,\cdots,n)$，

所以 $\boldsymbol{X}=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为所求的唯一解.

例 3 用克莱姆法则求解下列方程组：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}(a_{ii}\neq 0,i=1,2,\cdots,n).$$

解 系数行列式 $D=\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ii}$，因 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，故 $D\neq 0$，上方程组有唯一解，且可用克莱姆法则求之.

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{12}+a_{22} & a_{13}+a_{23} & \cdots & a_{1n}+a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(a_{12}+a_{22})a_{33}\cdots a_{nn}=(a_{12}+a_{22})\prod_{i=3}^{n}a_{ii},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & -1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=-a_{11}\prod_{i=3}^{n}a_{ii},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 1 & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & -1 & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0,$$

同法可得 $D_4=D_5=\cdots=D_n=0$，故

$$x_1=D_1/D=(a_{12}+a_{22})\prod_{i=3}^{n}a_{ii}\Big/\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=(a_{12}+a_{22})/(a_{11}a_{22}),$$

$$x_2=D_2/D=-a_{11}\prod_{i=3}^{n}a_{ii}\Big/\prod_{i=1}^{n}a_{ii}=-1/a_{22},$$

$$x_3=x_4=\cdots=x_n=0,$$

故原方程组的解为

$$X=[(a_{11}+a_{22})/(a_{11}a_{22}),-1/a_{22},0,\cdots,0]^T.$$ 解毕

由克莱姆法则易得到下列推论：

推论 1.11.1 如果齐次线性方程组(1.11.2)的系数行列式不等于零，那么该方程组只有零解.

上述推论有两方面的应用，即下面克莱姆法则的应用二和应用三.

应用二 已知齐次线性方程组(1.11.2)只有零解，由其系数行列式不等于零，确定该方程组系数行列式中参数的取值(范围).

例 4[1989 年 4] 齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\lambda x_2+x_3=0\\x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$$

只有零解，则 λ 应满足的条件是什么？

解 因齐次线方程组只有零解，故

$$D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&1\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2\neq0 \quad 即 \quad \lambda\neq1.$$

应用三 证明方程组(1.11.2)仅有零解.

为此只须证明其系数行列式 $D\neq0$.

例 5 设 a,b,c,d 是不全为零的实数，证明线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0\\bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0\\cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0\\dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0\end{cases}$$

仅有零解.

证 为证其系数行列式 D 不等于零，考虑到系数行列式的特点，先计算

$$D\cdot D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ b & -a & d & -c\\ c & -d & -a & b\\ d & c & -b & -a\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ b & -a & -d & c\\ c & d & -a & -b\\ d & -c & b & -a\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2\end{vmatrix}$$

$$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4.$$

因 $D^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4\neq0$,故 $D\neq0$. 由克莱姆法则知,所给方程组,只有零解.

注意 有些行列式对它直接求其值很困难,但如其方平 D^2 或 $D^2=DD^{\mathrm{T}}$ 易于计算时,可先求其平方的值,然后确定其符号,求出 D. 如上例 $D=\pm(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$,因 D 中 a^4 的系数为 -1,故 $D=-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

推论 1.11.1 的另一种说法,即它的逆否命题是:

推论 1.11.2 如果齐次线性方程组(1.11.1)有非零解,那么它的系数行列式必为零.

常利用推论 1.11.2 由系数行列式等于零确定其所含参数的取值(范围). 由此得到克莱姆法则在齐次线性方程组中的另一个应用是

应用四 已知方程组(1.11.2)有非零解,由其系数行列式等于零,确定系数行列式中参数的取值(范围),或确定其系数矩阵的行(列)向量之间的线性关系.

例 6[1.10] 问 λ 取何值时,下列齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0;\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0;\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0.\end{cases}$$

解 令上方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

为简化计算，先将 D 中一个常数元素消成零，提取 λ 的一次因式，得到

$$D\xlongequal{r_1+2r_3}\begin{vmatrix} -(\lambda-3) & 0 & -2(\lambda-3) \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & -3 \\ 1 & 1 & -(\lambda+1) \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(\lambda-3)[-(3-\lambda)(\lambda+1)+3]$$

$$=-(\lambda-3)(\lambda-2)\lambda=0.$$

故 $\lambda=0,2,3$ 时，上方程组有非零解.

例 7[1992 年 4]　已知三阶矩阵 $B\neq O$，且 B 的每个列向量都是下列方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0; \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0; \\ 3x_1+x_2-x_3=0, \end{cases}$$

的解向量. (1)求 λ 的值；(2)证明 $|B|=0$.

解(1)　因 $B\neq O$，故 B 中至少有一个非零列向量，依题意，所给齐次线性方程组有非零解，故其系数行列式必等于零，即

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

为使 $|A|$ 中第 2，3 列成比例，$\lambda=1$ 即可.

(2)**证明一**　若 $|B|\neq 0$，则 B 可逆，由 $AB=O$ 得到

$$ABB^{-1}=O\cdot B^{-1}=O \quad 即 \quad A=O,$$

这与 $A\neq O$ 矛盾，故 $|B|=0$.

(2)**证明二**　由上方程组的系数矩阵 $A\neq O$，故秩 $A\geqslant 1$，所以原方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为

$$n-r=3-\text{秩}\ A\leqslant 3-1=2,$$

即任意三个解向量必线性相关，而 B 的三个列向量均为其解向量，故它们必线性相关，从而必有 $|B|=0$.

习 题 1.11

1.[1997 年 1] 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 4 & t & 3\\ 3 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B$ 为 3 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 t 等于多少?

2.[1.9] 问 λ,μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0;\\ x_1+\mu x_2+x_3=0;\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0,\end{cases}$$

有非零解?

3.[1992 年 5] 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0\\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\ 3x_1+x_2-x_3=0,\end{cases}$$

的系数矩阵为 A，三阶矩阵 $B\neq O$，且 $AB=O$，试求 λ 的值.

4. 设有方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_1=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_1=b_2,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\tag{1.11.3}$$

$$\begin{cases}A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots+A_{1n}x_n=c_1,\\ A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots+A_{2n}x_n=c_2,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ A_{n1}x_1+A_{n2}x_2+\cdots+A_{nn}x_n=c_n,\end{cases}\tag{1.11.4}$$

其中 A_{ij} 为系数行列式 $|A|=|a_{ij}|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，证明方程组(1.11.3)有唯一解的充要条件是方程组(1.11.4)有唯一解.

第二章 矩　阵

§2.1 如何避免矩阵乘法中的常见错误

矩阵运算与行列式运算极易混淆之处主要表现在$|kA|$的计算上. 常数k乘行列式是将k只乘行列式的某一行(或列),而不是将k遍乘行列式的所有元素. 因而只要行列式中某一行(列)的元素有公因式就可把这公因式提到行列式外面.

数k乘矩阵是将k遍乘矩阵的所有元素,因此kA中每个元素都有公因数k. 如设$A=[a_{ij}]_{n\times n}$,则有

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.1.1}$$

其行列式$|kA|$,由于每行(列)都有一个公因数k可以提出,$|kA|$共有n个行,因而共可提取n个公因数k. 于是得到

$$|kA|=k^n|A|\ (n\text{ 为 }A\text{ 的阶数}). \tag{2.1.2}$$

一般$|kA|\neq k|A|$. 注意$|kA|=k|A|$是常犯错误.

例 1 设n阶矩阵A的行列式$|A|=a\neq 0$,而A^*为A的伴随矩阵,求$|A^*|$.

解 因$A^*=|A|A^{-1}=aA^{-1}$,两端取行列式,由(2.1.2)式得

$$|A^*|=|aA^{-1}|=a^n|A^{-1}|=a^n|A|^{-1}=a^{n-1}.$$ 解毕

与(2.1.2)式相类似,关系式

$$(kA)^*=k^{n-1}A^* \tag{2.1.3}$$

也容易产生混淆,错误地认为$(kA)^*=kA^*$.

矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的定义

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

注意，其中 A_{ij} 是 A 的 $n-1$ 阶子行列式，因而 $(kA)^*$ 的每个元素都是矩阵 kA 的 $n-1$ 阶子行列式，即为(2.1.1)式右端矩阵的 $n-1$ 阶子行列式. 显然，该行列式可提取 $n-1$ 个公因数 k，于是 kA 中的元素 ka_{ij} 的代数余子式为 $k^{n-1}A_{ij}$，即

$$(kA)^* = \begin{bmatrix} k^{n-1}A_{11} & k^{n-1}A_{21} & \cdots & k^{n-1}A_{n1} \\ k^{n-1}A_{12} & k^{n-1}A_{22} & \cdots & k^{n-1}A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^{n-1}A_{1n} & k^{n-1}A_{2n} & \cdots & k^{n-1}A_{nn} \end{bmatrix} = k^{n-1}A^*.$$

例 2 设 A 为 n 阶矩阵，则 $(-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$.

解 取 $k=-1$，由(2.1.3)式即得 $(-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$.

例 3 试证当 A 为 n 阶满秩矩阵时，$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

证 因 A 为满秩矩阵，故 $A^* = |A|A^{-1}$，由(2.1.3)式得到

$$(A^*)^* = (|A|A^{-1})^* = |A|^{n-1}(A^{-1})^*.$$

又由 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$（详见§2.2例2），有

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1} \\ &= |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A.\end{aligned}$$

矩阵乘法与数的乘法运算极易混淆之处主要表现在下述错误运算.

若 $AB=O$，则 $A=O$ 或 $B=O$.

这个错误运算有很多表现形式，例如，

若 $AB=O$，且 $A\neq O$，则 $B=O$；

若 $A^2=E$，即 $A^2-E=(A+E)(A-E)=O$，则

$$A=E \quad \text{或} \quad A=-E;$$

若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$；

若 $A^2=A$，即 $A(A-E)=O$，则 $A=E$ 或 $A=O$.

例 4 若 $AB=O$，且 $A\neq O$，则 $B=O$，这命题是否正确？如不正确，试举反例说明.

解 不正确. 问题归结为满足 $AX=0(A\neq O)$ 的解 X 是否只有零矩阵. 为方便计，设 A,X 均为 2 阶矩阵.

当 $A\neq O$ 时，可分两种情况讨论.

(a) $A\neq O$，且 $|A|\neq 0$，这时满足 $AX=0$ 的 X 只有 $X=O$；

(b) $A\neq O$，且 $|A|=0$，因而 A 的两列(行)对应元素成比例，且至少有一列(行)元素不完全是零.

如果 A 的第 2 列元素不完全是零，设其第 1,2 列对应元素之比为 k，即

$$A=\begin{bmatrix} ka & a \\ kb & b \end{bmatrix} \qquad (a,b\text{ 不完全为零}),$$

则所求的 X 为

$$X=\begin{bmatrix} x & y \\ -kx & -ky \end{bmatrix} \qquad (x,y\text{ 为任意数}),$$

即 X 为第 1,2 行对应元素之比是 $-(1/k)$ 的矩阵. 于是 A 的第 1,2 两列对应元素之比与 X 的第 1,2 两行对应元素之比互为负倒数，例如，若

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}(\text{第 1,2 列对应元素之比为 } 2/3)\text{则所求的 } X \text{ 为}$$

$$X=\begin{bmatrix} 3x & 2y \\ -2x & -2y \end{bmatrix}\text{或 } X=\begin{bmatrix} -3x & -3y \\ 2x & 2y \end{bmatrix},$$

其第 1,2 两行对应元素之比均为 $-(3/2)$. 因 x,y 为任意数，故 X 有无穷多个.

如果 A 的第 2 列的两个元素都等于零，但第 1 列元素至少有一个不是零，这时 A 的第 1,2 列对应元素之比视为无穷大，所求的 X 应是第 1,2 行对应元素之比等于零，因而 X 的第 1 行元素全为零，故 $X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -x & -y \end{bmatrix}$，或 $X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$. 因 x,y 为任意数，X 也

有无穷多个.

由上述可知，当 $AB=O$，且 $A\neq O$ 时，不能只推出 $B=O$，因而上述命题是错误的. 解毕

由上述讨论不难得到：

命题 2.1.1 已知 2 阶矩阵 $A\neq O$，且 $|A|=0$.

(1)如 A 的第 2 列元素不全为零，且第 1,2 列对应元素之比为 k(常数)，不妨设 $A=\begin{bmatrix}ka & a\\ kb & b\end{bmatrix}$($a,b$ 不全为零)，则满足 $AX=O$，且 $X\neq O$ 的二阶矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}c & d\\ -kc & -kd\end{bmatrix}\text{或 }X=\begin{bmatrix}-c & -d\\ kc & kd\end{bmatrix}, \tag{2.1.4}$$

于是 A 的第 1,2 列与 X 的第 1,2 行对应元素之比互为负倒数，其中 c、d 是不全为零的任意数.

(2)如 A 的第 2 列元素全为零，则 A 的第 1,2 列对应元素之比视为无穷大，不妨设

$$A=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\quad (a,b\text{ 不全为零}),$$

则满足 $AX=O$ 且 $X\neq O$ 的 2 阶矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}0 & 0\\ c & d\end{bmatrix}\text{或}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -c & -d\end{bmatrix},$$

其中 c,d 为不全为零的任意数，显然 A 的第 1,2 两列与 X 的第 1,2 两行对应元素之比是互为负倒数.

例 5[2.6(3)] 举反例说明下列命题是错误的：

若 $AX=AY$，且 $A\neq O$，则 $X=Y$.

解 根据命题 2.1.1，先写出满足 $AW=O$ 的非零矩阵 W，为此，任取满足 $A\neq O$ 且 $|A|=0$ 的 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 6 & 3\end{bmatrix}$，其第 1,2 两列对应元素之比为 $k=2$. 由(2.1.4)式，所求的 W 为

$$W=\begin{bmatrix}c & d\\ -2c & -2d\end{bmatrix}\text{或 }W=\begin{bmatrix}-c & -d\\ 2c & 2d\end{bmatrix},$$

其中 c,d 是不全为零的任意实数.

再将 W 拆成两矩阵之差:$W=X-Y$,例如,令

$$W=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{bmatrix}=X-Y,$$

或
$$W=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=X-Y,$$

则有 $AW=A(X-Y)=O$,从而 $AX=AY$,$A\neq O$,但

$$X=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\neq Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \qquad (c,d\ \text{不全为零})$$

或
$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{bmatrix}\neq Y=\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (c,d\ \text{不全为零})$$

如取 $c=5,d=4$,则 $X=\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\neq Y=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$但满足

$$AX=AY.$$

由上可知,在矩阵乘法中消去律一般是不成立的.

例 6 试举反例说明下列命题是错误的:

若 $A^2=E$,则 $A=E$ 或 $A=-E$.

解 在数的运算中,若 $x^2=1$,只有 $x=1$ 或 $x=-1$ 这两种情况.但对于矩阵运算,情况就不同了.满足 $X^2=E$ 的矩阵 X 远不止两个,而是无穷多个.下用比较元素法求出.

为方便计,设 A 为 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,由 $A^2=E$ 得到

$$A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由此推出
$$a^2+bc=1, b(a+d)=0,$$
$$c(a+d)=0, d^2+bc=1.$$

如 $a+d=0$,即 $a=-d$,则满足此条件的部分方阵为

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}(\text{其中 } a^2+bc=1,\text{则 } a=\pm\sqrt{1-bc}),$$

于是下列方阵为所求的部分方阵:

$$A_1=\begin{bmatrix}\sqrt{1-bc} & b\\ c & -\sqrt{1-bc}\end{bmatrix}\quad(b,c\text{ 为任意数}),\qquad(2.1.5)$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-\sqrt{1-bc} & b\\ c & \sqrt{1-bc}\end{bmatrix}\quad(b,c\text{ 为任意数}),\qquad(2.1.6)$$

如 $a+d\neq0$，则 $b=c=0$，于是 $a^2=1$ 即 $a=\pm1$，从而 $d=\pm1$，又因 $a+d\neq0$，故只有 $a=d=1$，$a=d=-1$ 这两种情况，因而满足 $a+d\neq0$ 且 $A^2=E$ 的方阵为 $A_3=E$ 或 $A_4=-E$.

由上述讨论可知，只要 2 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的元素满足

$$a+d=0,a^2+bc=1\qquad(2.1.7)$$

都有 $A^2=E$ 且 $A\neq\pm E$. 显然满足(2.1.7)式的 a,b,c,d 有无穷多组，因而满足 $A^2=E$，且 $A\neq\pm E$ 的矩阵 A 有无穷多个. 例如选取 $b=c=1$，由(2.1.7)式得到 $a=d=0$，于是 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，满足 $A^2=E$，且 $A\neq\pm E$.

例 7[2.6(2)] 若 $A^2=A$，则 $A=E$ 或 $A=O$. 这命题是否对？如不对，试举反例说明.

解 本例可仿上例求出满足 $A^2=A$ 的所有 2 阶矩阵 A，但推导过程较繁(详见 §4.9 例 1). 下面利用命题 2.1.1，可简单求出满足 $A^2=A$，但 $A\neq E,A\neq O$ 的无穷多个矩阵.

设 $A=\begin{bmatrix}a & a\\ b & b\end{bmatrix}$ (a,b 为任意数，待求)，则

$$A-E=\begin{bmatrix}a-1 & a\\ b & b-1\end{bmatrix}.$$

a,b 满足什么条件使 $A^2=A$，即使 $A(A-E)=O$ 呢？因 A 的第 1,2 列对应元素之比为 1，由命题 2.1.1 可知当 $A-E$ 的第 1,2 行对应元素之比为 -1 时，能保证 $A(A-E)=O$，于是得到

$$(a-1)/b=a/(b-1)=-1,\text{即 } a+b=1,$$

故其元素满足 $a+b=1$ 的矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & a\\ b & b\end{bmatrix}$，均有 $A^2=A$. 据此易

举出反例说明 $A^2=A$ 时必有 $A=O$ 或 $A=E$ 的结论是错误的.

例如 $a=1,b=0$ 时有 $a+b=1$,且 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\neq E,\neq O$,但 $A^2=A$;又如 $a=b=1/2$ 时,有 $a+b=1$,且 $A=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\1/2 & 1/2\end{bmatrix}\neq E,\neq O$,但 $A^2=A$ 等等.

习　　题　2.1

1.[2.6(1)]　求出满足 $A^2=O$ 的无穷多个 2 阶矩阵,并举反例说明,由 $A^2=O$ 推出 $A=O$ 结论是不对的.

§2.2　矩阵可逆及其逆矩阵表示式的同证方法

大家知道,对于方阵 A,如果有同阶方阵 B,使

$$AB=AB=E(E\text{ 是与 }A\text{ 同阶的单位矩阵}),$$

则称 A 为可逆阵,且称 B 为 A 的逆矩阵,记作 $A^{-1}=B$.

命题 2.2.1　设 A,B 为 n 阶方阵,如果 $AB=E$(或 $BA=E$)必有 $BA=E$(或 $AB=E$).

注意　对长方阵 A,B 来说,即使 $AB=E$,但不一定 $BA=E$.

例 1[1991 年 1,2]　设 A,B,C 均为 n 阶矩阵,E 为 n 阶单位矩阵,且 $ABC=E$,则必有______.

(A) $ACB=E$　(B) $CBA=E$　(C) $BAC=E$　(D) $BCA=E$

解　用 A,B,C 都为 n 阶方阵,由 $ABC=E$ 得到

$$A(BC)=(BC)A=BCA=E,\text{或}(AB)C=C(AB)=CAB=E,$$

故(D)入选.

注意　如果 A_1,A_2,A_3,A_4 为同阶方阵,由 $A_1A_2A_3A_4=E$ 得

$$(A_2A_3A_4)\cdot A_1=A_1(A_2A_3A_4)=A_1A_2A_3A_4=E;$$

$(A_3A_4)\cdot(A_1A_2)=(A_1A_2)\cdot(A_3A_4)=A_1A_2A_3A_4=E;$

$A_4(A_1A_2A_3)=(A_1A_2A_3)A_4=A_1A_2A_3A_4=E.$

一般若 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 为同阶方阵，且 $A_1A_2\cdots A_m=E$，则对任意 $i(2\leqslant i\leqslant m)$，得到

$$(A_iA_{i+1}\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_{i-1})=(A_1A_2\cdots A_{i-1})(A_iA_{i+1}\cdots A_m)=E.$$

由题命 2.2.1 易得到下述命题：

命题 2.2.2 A,B 是方阵，如 $AB=E$(或 $BA=E$)，则 A,B 均为可逆矩阵，且

$$A^{-1}=B,B^{-1}=A.$$

证明矩阵 A 可逆，且同时证明 A 的逆矩阵 A^{-1} 等于所给矩阵 B，即证 $A^{-1}=B$，常用命题 2.2.2 证之. 事实上欲证 A 为可逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，只须去掉 A^{-1} 的右上方逆矩阵的符号"-1"，将 A 右(或左)乘 B，证其乘积矩阵等于单位矩阵 E 即可.

易看出根据上述命题比根据定义证明手续要减少一半.

例 2 设 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，试证 A^* 是可逆阵，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

证 去掉 $(A^*)^{-1}$ 的逆矩阵符号"-1"，得到 A^*，将其左乘 $(A^{-1})^*$，如果能证明其乘积 $A^*(A^{-1})^*=E$，则两问题同时得证.

下面利用 $A^*=|A|A^{-1}$，证明 $A^*(A^{-1})^*=E$. 事实上

$$A^*(A^{-1})^*=|A|A^{-1}|A^{-1}|(A^{-1})^{-1}=E.$$

例 3[2.14] 若 $A^k=O$(k 为正整数)，证明

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证 去掉 $(E-A)^{-1}$ 的逆矩阵符号"-1"得 $E-A$，将其与等式右端矩阵相乘，利用 $A^k=O$，得到

$$(E-A)(E+A+\cdots+A^{k-1})=E^k\cancel{-A^k=E},$$

故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$ 证毕

逆矩阵的表示式中如果含和矩阵的逆矩阵为因子矩阵，常用提取公因式、将和矩阵化为乘积矩阵、将单位矩阵 E 改写为某一

矩阵与其逆矩阵的乘积等方法，消去和矩阵的逆矩阵.

例 4 设 $A,B,A+B$ 都可逆，证明 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

证 首先注意，如能证明第一个等式成立，则有 $(B^{-1}+A^{-1})^{-1}=B(B+A)^{-1}A$ 即 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$，因而第二个等式也成立. 下证第一个等式成立，只需证 $(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]=E$. 下面给出四种证法.

证明一 $(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]$

$=A^{-1}A(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$

$=E(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$

$=B^{-1}B(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$（$E$ 恒等变形）

$=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B$（提公因式，和化积）

$=B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B=E.$

证明二 $(A^{-1}+B^{-1})A(A+B)^{-1}B$

$=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$

$=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$

$=B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B=E.$

证明三 $(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]$

$=A^{-1}A(A+B)^{-1}B+B^{-1}A(A+B)^{-1}B$

$=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B$

$=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}(B^{-1})^{-1}$

$=(E+B^{-1}A)[B^{-1}(A+B)]^{-1}$

$=(E+B^{-1}A)(E+B^{-1}A)^{-1}=E.$

证明四 将 $A^{-1}+B^{-1}$ 恒等变形，得到

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1},$$

或

$$A^{-1}+B^{-1}=B^{-1}(A+B)A^{-1}.$$

对上两式分别求逆，即各

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A,$$

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B.$$

证毕

证明矩阵 A 可逆的同时，还需求出 A 的逆矩阵 A^{-1}的命题，也常利用命题 2.2.2，找出满足 $AB=E$ 或 $BA=E$ 的矩阵 B，从而使两问题一并解决.

求 B 的常用方法之一是将矩阵等式化为矩阵 A 与另一矩阵之乘积等于单位矩阵 E 的等式，这另一矩阵就是所求的 B.

例 5[2.15] 设方阵 A 满足 $A^2-A-2E=O$. 证明 A 及 $A+2E$ 都可逆，并求 A^{-1}及$(A+2E)^{-1}$.

解 (1)**证明一** 由题设有 $A(A-E)=2E$，$A[(A-E)/2]=E$. 由命题 2.2.2 知，A 可逆，且 $A^{-1}=(A-E)/2$.

(1)**证明二** 在 $A(A-E)=2E$ 两端取行列式，设 A 的阶数为 n，则

$|A||A-2E|=|2E|=2^n\neq0$，故$|A|\neq0$. 因而 A 可逆.

在上式两端左乘 A^{-1}，得到 $A-E=2A^{-1}$，即 $A^{-1}=(A-E)/2$.

(2)由题设有 $A^2-4E-(A+2E)=-4E$. 因 A 与 $2E$ 可交换故$(A+2E)(A-2E)-(A+2E)=-4E$，即

$$(A+2E)[(A-3E)/(-4)]=E.$$

由命题 2.2.2 知，$A+2E$ 可逆，且$(A+2E)^{-1}=(3E-A)/4$.

注意 对于需证 A 可逆，又要求出 A 的逆矩阵的命题，不必先证$|A|\neq0$(证明 A 可逆)，再求 A 的逆矩阵(如上例的证明二)，应按上例证明一那样两问题一并解决，因为有些命题单独证明$|A|\neq0$十分困难.

例 6 已知 $A^3=2E$，$B=A^2-2A+2E$. 证明 B 可逆，并求出其逆.

解 将 $2E=A^3$ 代入 B 的表示式得到

$$B=A^2-2A+A^3=A(A^2+A-2E)=A(A+2E)(A-E).$$

如能证明 A，$A+2E$ 及 $A-E$ 可逆，且又能分别求出其逆矩阵，则就证明了 B 可逆，其逆矩阵也就能求出. 事实上

(1)由 $A^3=2E$ 得到 $A^3-E=E$ 即$(A-E)(A^2+A+E)=E$，故 $A-E$ 可逆，且$(A-E)^{-1}=A^2+A+E$.

(2)由 $A^3=2E$ 得到 $A(A^2/2)=E$，故 A 可逆，且 $A^{-1}=A^2/2$.

(3)由 $A^3=2E$ 得 $A^3+2^3E=2E+2^3E=10E$，即

$$(A+2E)[(A^2-2A+4E)/10]=E,$$

故 $A+2E$ 可逆，且 $(A+2E)^{-1}=(A^2-2A+4E)/10$.

因 $A,A+2E,A-E$ 可逆，故其乘积 $B=A(A+2E)(A-E)$ 可逆，且

$$\begin{aligned}B^{-1}&=[A(A+2E)(A-E)^{-1}]=(A-E)^{-1}(A+2E)^{-1}A^{-1}\\&=(A^2+A+E)(A^2-2A+4E)A^2/20\\&=(A^6-A^5+3A^4+2A^3+4A^2)/20\\&=(4E-2A^2+6A+4E+4A^2)/20=(A^2+3A+4E)/10.\end{aligned}$$

例 7[1996 年 4] 已知对于 n 阶方阵 A，存在自然数 k，使 $A^k=O$，试证矩阵 $E-A$ 可逆，并写出其逆矩阵的表示式(E 为 n 阶单位阵).

证 由初等代数中的因式分解

$$1-a^k=(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{k-1})$$

及 E 与 A 可交换，$A^k=O$ 易验证有

$$E=E-A^k=(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}),$$

故 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

注意 由下列因式分解

$$1-a^k=(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-\cdots+a^{k-2}-a^{k-1})(k\text{ 为偶数}),$$
$$1+a^k=(1+a)(1-a+a^2-a^3+a^4-\cdots-a^{k-2}+a^{k-1})(k\text{ 为奇数})$$

及 E 与 A 可交换，$A^k=O$ 易验证有

$$E=E-A^k=(E+A)(E-A+A^2-A^3+A^4-\cdots+A^{k-2}-A^{k-1})(k\text{ 为偶数}),$$
$$E=E+A^k=(E+A)(E-A+A^2-A^3+A^4-\cdots-A^{k-2}+A^{k-1})(k\text{ 为奇数}).$$

即使对于元素具体给出的矩阵欲证其可逆，并求其逆矩阵的命题，也不一定先证其行列式不等于零，最好是利用命题 2.2.2 —

并解决.

例 8　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

(1)求 A^2;(2)证明 A 可逆,且求 A^{-1};(3)求$(A^*)^{-1}$.

解(1)　直接计算,易求得 $A^2=4E$;

(2)由 $A(A/4)=E$ 得到 A 可逆,且 $A^{-1}=A/4$;

(3)$A^*=|A|A^{-1}$,故$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=A/|A|$,易算得 $|A|=-16$,故$(A^*)^{-1}=-A/16$.

习　题　2.2

1.[选择题]　A,B,C,E 为同阶方阵,E 为同阶单位矩阵,若 $ABC=E$,则下列各式中正确的是____A.

(A) $BCA=E$　(B) $ACB=E$　(C) $CAB=E$　(D) $CBA=E$

2.A 为 n 阶可逆矩阵,试证

(1)$(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$,　(2)$(A^{-1})^{-1}=A$.

3.$A^m=O$,且 m 为奇数,试证 $E+A$ 也可逆,且

$$(E+A)^{-1}=E-A+A^2-\cdots-A^{m-2}+A^{m-1}.$$

4.设 A,B 为 n 阶矩阵,试证 $E+BA$ 为可逆矩阵,且

$$(E+BA)^{-1}=E-B(E+AB)^{-1}A.$$

5.若 A 满足 $A^2-2A-3E=O$,试证 $A+E$ 是可逆矩阵,并求$(A+E)^{-1}$.

6.设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m\ (a_m\neq 0)$,$A$ 为一方阵,若 $f(A)=O$,证明 A 可逆,并求 A^{-1}.

7.设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

(1)求 A^2;(2)证明 $A+2E$ 可逆,并求$(A+2E)^{-1}$.

8.[1992 年 5]　设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵,则$(A^{-1}+$

$B^{-1})^{-1}$等于______.

(A) $A^{-1}+B^{-1}$ (B) $A+B$ (C) $A(A+B)^{-1}B$ (D) $(A+B)^{-1}$

9. 设 A,B 及 $A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆阵，证明 $A+B$ 可逆，且

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}.$$

§2.3 逆矩阵的求法

方法一 初等变换法

求元素为具体数字的矩阵的逆矩阵，常用初等变换法，即

$$[A \vdots E]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{仅用初等}}[E \vdots A^{-1}],$$

或

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{仅用初等}}\begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

例 1 用初等行变换，求矩阵 A 的逆矩阵，已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

解 $$[A \vdots E]\xrightarrow[i=2,1]{r_{i+1}+(-1)r_i}\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

故

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 (1)在用初等行变换求矩阵 A 的逆矩阵的整个运算过程中只充许施行初等行变换，而不充许施行初等列变换；

(2)在施行初等行变换的过程中，如果发现 A 的变换矩阵不是满秩矩阵，那么可以断言 A 不可能变到单位矩阵，则 A 就是不可逆矩阵．因而不必单独判断 A 是否可逆.

例 2 用初等行变换求下列矩阵 A 的逆矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 4 & 1 & 2\\ 2 & 5 & 4\end{bmatrix}.$$

解 $[A \vdots E]\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-4)r_1}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 6 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 9 & 6 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]$. 因 A 的变换矩阵 $\begin{bmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & 9 & 6\\ 0 & 9 & 6\end{bmatrix}$ 不是满秩矩阵，故 A 为不可逆矩阵.

方法二 伴随矩阵法

设 $A=[a_{ij}]$ 为 n 阶矩阵，a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}，

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

为 A 的伴随矩阵，则 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*$.

利用上式计算 A 的逆矩阵的方法称为伴随矩阵法.

该法主要用于逆矩阵或伴随矩阵的理论推导上，但对于阶数较低(一般不超过 3)或元素的代数余子式易于计算的矩阵可用此法求其逆矩阵.

利用初等变换求矩阵的逆矩阵比用伴随矩阵法简便，特别当阶数较高时，使用初等变换法的优点就更明显.

使用伴随矩阵法求逆矩阵时，应注意以下几点：

(i)准确地算出 A^*，为此最好先写出 A 的代数余子式矩阵

$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix},$$

然后将它转置，才是 A^*，不要把上述矩阵当作伴随矩阵 A^*.

(ii) A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式，不是余子式，因此 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. 计算时，千万不要遗漏代数符号 $(-1)^{i+j}$.

例 3 试求下列矩阵的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ 4\sin\theta & 4\cos\theta\end{pmatrix}.$$

解 显然 $|A|=4$，$A_{11}=4\cos\theta$，$A_{12}=-4\sin\theta$，$A_{21}=\sin\theta$，$A_{22}=\cos\theta$，用伴随矩阵法，得到

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4\cos\theta & \sin\theta\\ -4\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$ 解毕

注意 本例说明对于 2 阶矩阵用伴随矩阵法求其逆是非常方便的. 本例如采用初等变换法，做起来反倒麻烦，这是因为需对 $\cos\theta\neq0$ 与 $\cos\theta=0$ 两种情况分别加以讨论.

由本例还可总结出求 2 阶矩阵逆矩阵的“两调一除”的方法：将 A 中主对角元调换其位置，次对角元调换其符号，然后将各元用 $|A|$ 去除，即得 A 的逆矩阵.

方法三 公式法

利用下述诸公式，能迅速准确地求出逆矩阵.

1) 二阶矩阵的逆矩阵计算公式（两调一除）：

若 $$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}，则\ A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}. \tag{2.3.1}$$

2) 初等矩阵的逆矩阵计算公式详见(2.15.3)式、(2.15.4)式及(2.15.5)式；

3) 主对角线及其上方元素全为 1 的上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{2.3.2}$$

4) 正交矩阵的逆矩阵计算公式：

$$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}. \tag{2.3.3}$$

其他常用的逆矩阵计算公式还有

5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$; (2.3.4)

6) $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$; (2.3.5)

7) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$; (2.3.6)

$(A^*)^{-1}=|A|^{-1}A$. (2.3.7)

例 4 求$(AB)^{-1}$,已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

解 A为3阶初等矩阵,由(2.3.4),(2.3.2),(2.15.3)式得

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

方法四　恒等变形法

有些计算命题表面上与求逆矩阵无关,但实质上只有求出有关矩阵的逆矩阵才能算得出来.而这逆矩阵的求出常须对所给矩阵等式恒等变形,且常变形为两矩阵乘积等于单位矩阵的等式.

例 5 已知$A^6=E$,试求A^{11},其中

$$A=\begin{bmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2\\ \sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

解 对矩阵等式恒等变形得到

$$A^6=E\cdot A^6=A^6\cdot A^6=A\cdot A^{11}=E,$$

故 $A^{11}=A^{-1}$，而 A 又为正交矩阵，$A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，从而

$$A^{11}=A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & \sqrt{3}/2\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

例 6[1990 年 1]　设四阶矩阵

$$B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

且矩阵 A 满足关系式 $A(E-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=E$，试将上述关系化简，并求出矩阵 A.

解　由所给的矩阵关系式得到

$$A[C(E-C^{-1})B]^{\mathrm{T}}=E,\text{即 } A(C-B)^{\mathrm{T}}=E,$$

故

$$A=[(C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}.$$

解毕

另外有些计算命题中虽出现逆矩阵，但通过适当矩阵运算可消去，因而不必急于求出.

例 7　计算 $(4E+A)^{\mathrm{T}}(4E-A)^{-1}(16E-A^2)$ 的行列式，已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix}.$$

解　令所求的行列式为 Δ，则

$$\begin{aligned}\Delta&=|(4E+A)^{\mathrm{T}}(4E-A)^{-1}(4E-A)(4E+A)|\\&=|(4E+A)^{\mathrm{T}}(4E+A)|=|4E+A|^2=22500.\end{aligned}$$

解毕

方法五　解方程组法

根据可逆的上（下）三角矩阵的逆仍是上（下）三角矩阵，且上（下）三角矩阵逆矩阵的主对角元分别为上（下）三角矩阵对应的主对角元的倒数，可设出逆矩阵的待求元素；又由 $A^{-1}A=E$ 两端对应元素相等，依次可得只含一个待求元素的诸线性方程，因而待求

元素极容易求得，故此法常用来求上(下)三角矩阵的逆矩阵.

例 8[2.11(4)] 求下列矩阵的逆矩阵，已知

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{bmatrix}.$$

解 设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\x_{21}&1/2&0&0\\x_{31}&x_{32}&1/3&0\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&1/4\end{bmatrix}$. 先求 A^{-1}中主对角线下的次对角线上的元素 x_{21},x_{32},x_{43}，再求 x_{31},x_{42}，最后求 x_{41}. 设E为 4 阶单位矩阵，比较

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\x_{21}&1/2&0&0\\x_{31}&x_{32}&1/3&0\\x_{41}&x_{42}&x_{43}&1/4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\2&1&3&0\\1&2&1&4\end{bmatrix}=E$$

的两端对应元素，得到

$1\cdot x_{21}+1\cdot 1/2+2\cdot 0+1\cdot 0=0$; 解之，$x_{21}=-1/2$;

$0\cdot x_{31}+2\cdot x_{32}+1/3+2\cdot 0=0$; 解之，$x_{32}=-1/6$;

$0\cdot x_{41}+0\cdot x_{42}+3\cdot x_{43}+1/4=0$; 解之，$x_{43}=-1/12$;

$1\cdot x_{31}+1\cdot x_{32}+2/3+1\cdot 0=0$; 解之，$x_{31}=-1/2$;

$0\cdot x_{41}+2\cdot x_{42}+1\cdot x_{43}+2/4=0$; 解之，$x_{42}=-5/4$;

$1\cdot x_{41}+1\cdot x_{42}+2\cdot x_{43}+1/4=0$; 解之，$x_{41}=1/8$.

于是，所求的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1/2&1/2&0&0\\-1/2&-1/6&1/3&0\\1/8&-5/4&-1/12&1/4\end{bmatrix}.$$

上例还可用初等行变换求之．读者自行求出．

此外，逆矩阵的求法还有分块求逆法(见§2.9).

习 题 2.3

1. 已知三阶矩阵 P,适合

$$P\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix},$$

你能用几种方法求出 P,一一给出.

2. 求$(AB)^{-1}$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

3. 试计算$(A-2E)^{-1}(A^2-4E)$,其中 E 为单位矩阵,且

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

§2.4 已知矩阵 A(或 B)如何从含 A 和(或)B 及 AB 的矩阵方程中求出矩阵 B(或 A)

常用两法求之.其一将所给矩阵方程化成

$$f(A)B=A \quad 或 \quad g(B)A=B$$

之形式,使所求矩阵 B 或 A 为一因子矩阵,再利用 $f(A)$或 $g(B)$的可逆性,即可求出所求矩阵:

$$B=[f(A)]^{-1}A \quad 或 \quad A=[g(B)]^{-1}B.$$

其二是为将所给矩阵方程化成左端为两矩阵 $A-aE$ 与 $B-bE$(a,b 为常数)的乘积,右端为数量矩阵 cE 即化成

$$(A-aE)(B-bE)=cE$$

之形式.为此,常在原矩阵方程两端加减单位矩阵的若干倍进行

恒等变形.

无论使用上面的哪种方法,都应注意尽量化简矩阵方程,以简化计算.

例 1[1992 年 2] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$,且满足 $AB+E=A^2+B$,其中 E 为 3 阶单位矩阵,试求 B.

解 所给矩阵方程易化为

$$(A-E)B=A^2-E=(A-E)(A+E),$$

而 $A-E=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$显然可逆.将其逆左乘上方程两端即得

$$B=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E)=A+E=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}.$$

注意 如按 $B=(A-E)^{-1}(A^2-E)$计算,先求$(A-E)^{-1}$,再求 A^2-E,最后将所求结果相乘.这样做,计算量要大得多,且容易出错.

例 2[2.16] 设矩阵 A,B 满足 $AB=A+2B$,求 B,其中

$$A=\begin{bmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}.$$

解法一 由 $AB=A+2B$,得到 $(A-2E)B=A$,$B=(A-2E)^{-1}A$.而 $A-2E=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$,易求得

$$(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix},$$

故 $$B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{bmatrix}.$$

解法二 $(A-2E)B=A,(A-2E)B-A=O,$

$$(A-2E)B-A+2E=2E \quad (\text{两端同加 } 2E),$$

即 $(A-2E)B-(A-2E)=2E,(1/2)(A-2E)(B-E)=E,$

故 $$B-E=[(1/2)(A-2E)]^{-1}$$

$$B=E+[(1/2)(A-2E)]^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{bmatrix}.$$

解法三 在原矩阵两端左乘 A^{-1},得到

$$B=E+2A^{-1}B,\text{即}(E-2A^{-1})B=E,$$

而 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/5 & 0 & -1/5\\ -1/5 & 1 & 1/5\\ 1/5 & -2/3 & 2/15\end{bmatrix},$$

$$E-2A^{-1}=\begin{bmatrix}3/5 & 0 & 2/5\\ 2/5 & -1 & -2/5\\ -2/5 & 4/3 & 11/5\end{bmatrix},$$

故 $$B=(E-2A^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -8 & -6\\ 2 & -9 & -6\\ -2 & 12 & 9\end{bmatrix}.$$

例 3[1995 年 1,2] 设三阶方阵 A,B 满足关系式 $A^{-1}BA=6A+BA$,求 B,其中

$$A=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & 0\\ 0 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 1/7\end{bmatrix}.$$

解法一 在所给矩阵方程两端右乘 A^{-1}得到

$$A^{-1}B=6E+B,B=6A+AB,\text{即}(E-A)B=6A,$$

故 $B=6(E-A)^{-1}A=6\begin{bmatrix}2/3 & & \\ & 3/4 & \\ & & 6/7\end{bmatrix}^{-1}A$

$$=6\begin{bmatrix}3/2 & & \\ & 4/3 & \\ & & 7/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & & \\ & 1/4 & \\ & & 1/7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

解法二 由所给方程易得到

$$AB-B+6A=(A-E)B+6A=O.$$

$$(A-E)B+6A-6E=-6E \quad (两端减去 6E),$$

即
$$[(-1/6)(A-E)](B+6E)=E,$$

$$B+6E=[(-1/6)(A-E)]^{-1},$$

故 $B=[(-1/6)(A-E)]^{-1}-6E=-6(A-E)^{-1}-6E$

$$=-6\begin{bmatrix}-2/3 & & \\ & -3/4 & \\ & & -6/7\end{bmatrix}^{-1}-6E=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

例 4 已知 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$,$B=[b_{ij}]_{n\times n}$,且可逆,又

$$b_{ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

证明 $\quad B=(E-A)^{-1}-E$ (其中 E 为 n 阶单位矩阵).

证 由 A,B 及 AB 的第 i 行,第 j 列元素之上述关系可知

$$B=A+BA,\text{即 } B(E-A)-A=O,$$

于是 $\quad B(E-A)+(E-A)=E$ (两端同加 E),

即 $$(B+E)(E-A)=E,$$

故 $\quad B+E=(E-A)^{-1},\quad B=(E-A)^{-1}-E.$

例 5 设 A,B 为 n 阶方阵,$AB=A+B$,证明 $AB=BA$.

证 由 $AB=A+B$ 得到

$$AB-A-B=O,AB-A-B+E=E,\text{即}(A-E)(B-E)=E.$$

因 $A-E$ 与 $B-E$ 均为 n 阶方阵,且 $(A-E)(B-E)=E$,由命题 2.2.1 得到

$$(B-E)(A-E)=E \quad 即 \quad BA-A-B+E=E,$$

亦即 $BA-A-B=O$，故 $BA=A+B$，从而 $BA=AB$.

习　　题 2.4

1. [1997 年 2]　已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$，且 $A^2-AB=E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，求矩阵 B.

2. [1987 年 1]　设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$. 求矩阵 B，其中 $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 4\end{bmatrix}$.

§2.5　元素没有具体给出的矩阵行列式等于零或不等于零的证法

矩阵 A 的元素没有具体给出，证明该矩阵的行列式等于零或不等于零，用直接计算的方法去证是行不通的，常用反证法证之.

(一)为证矩阵 A 的行列式等于零，可设该行列式不等于零. 于是该矩阵是可逆矩阵，常在有关矩阵等式两端左乘(或右乘)其逆矩阵，导出矛盾，或证 $AX=0$ 有非零解.

例 1　如果 $A^2=A$，但 A 不是单位矩阵，则 A 必为奇异矩阵.

证　用反证法证之. 如果 A 是非奇异矩阵，则 A 为可逆矩阵. 于是 A^{-1}存在，在矩阵等式 $A^2=A$ 两端左乘 A^{-1}，得到

$$A^{-1}A^2=A^{-1}A=E \quad 即 \quad A=E.$$

这与题设 $A\neq E$ 矛盾，故 A 必为奇异矩阵.

例 2　若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩都必小于 n.

证明一 如 A 的秩等于 n，则 A 为可逆阵，由 $AB=O$，得到

$$A^{-1}AB=A^{-1}O=O \quad 即 \quad B=O.$$

这与题设 B 为非零矩阵矛盾，故 A 的秩必小于 n.

同法可证 B 的秩也小于 n.

证明二 由 $AB=O$ 可知 B 的 n 个列向量是 $AX=\mathbf{0}$ 的 n 个解向量，因 B 为非零矩阵，故上方程组有非零解，因而 $|A|=\mathbf{0}$，即秩 $A<n$.

由 $AB=O$ 可知 A 的 n 个行向量是 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$ 的解向量，因 A 为非零矩阵，故上方程组有非零解，从而 $|B|=0$，即秩 $B<n$.

证明三 因 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解，设秩 $A=r$，则 $n-r\geqslant 1$，即上方程组的一个基础解系至少含一个解向量，因而 $r\leqslant n-1$，故

$$秩\ A=r\leqslant n-1<n.$$

同法可证秩 $B=r\leqslant n-1<n$.

例 3[1996 年 1,2] 设 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}$，其中 E 是 n 阶单位阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^{T} 是 ξ 的转置，证明

(1) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$；

(2) 当 $\xi^{\mathrm{T}}\xi=1$ 时，A 是不可逆矩阵.

证 (1)的证明见习题 2.7 第 2 题. 下只证(2).

(2)**证明一** 由题设 ξ 是 n 维非零列向量，$\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq O$，故 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq E$，又由(1)知道有 $A^2=A$，如果 A 可逆，则

$$A^{-1}A^2=A^{-1}A，即\ A=E.$$

这与 $A\neq E$ 矛盾，所以 A 是不可逆矩阵.

(2)**证明二** 由 $A=E-\xi\xi^{\mathrm{T}}$ 得到 $A\xi=E\xi-\xi\xi^{\mathrm{T}}\xi=\xi-\xi=\mathbf{0}$. 因 $\xi\neq\mathbf{0}$，故 $AX=0$ 有非零解. 因而 $|A|=0$.

(2)**证明三** 由(1)有 $A(E-A)=O$，而 $E-A=\xi\xi^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，故 $E-A$ 的各列向量都是 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，因而 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解，所以 $|A|=0$.

上述几例的题设中都给出一矩阵等式，为使用反证法，"产生矛盾"创造了条件. 如没有给出矩阵等式，应注意利用已知的矩阵

等式，例如 $AA^*=A^*A=|A|E$ 等，产生矛盾；也可利用有关定理产生矛盾.

例 4[2.19] 设 n 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^*，证明

(1)若 $|A|=0$，则 $|A^*|=0$；(2) $|A^*|=|A|^{n-1}$.

证 (1)用反证法证之. 如 $|A^*|\neq 0$，则 A^* 可逆，于是

$$A^*(A^*)^{-1}=E.$$

为利用 $AA^*=|A|E$，在上等式两端左乘 A，由 $|A|=0$，得到

$$AA^*(A^*)^{-1}=A \quad 即 \quad |A|E(A^*)^{-1}=O=A.$$

因 $A=O$，故 $A^*=O$，从而 $|A^*|=0$，这与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾，所以 $|A^*|=0$.

(2)(i) $|A|=0$ 时，由(1)有 $|A^*|=0$，从而 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

(ii)当 $|A|\neq 0$ 时，由 $AA^*=|A|E$ 得到

$$|A||A^*|=|A|^n \quad 即 \quad |A^*|=|A|^{n-1}.$$

由(i)(ii)可知，对任意 n 阶矩阵 A，均有

$$|A^*|=|A|^{n-1}. \tag{2.5.1}$$

例 5 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，且 $n<m$，试证明 AB 是不可逆矩阵.

证 用反证法证之. 如 AB 为可逆矩阵，则 $|AB|\neq 0$. 因 AB 为 m 阶矩阵，故秩$(AB)=m$. 但

$$秩(A)\leqslant n<m, \quad 秩(B)\leqslant n<m,$$

于是秩$(AB)>$秩(A)和秩(B)，因而秩$(AB)>\max\{秩(A)，秩(B)\}$这与秩$(AB)\leqslant\min\{秩(A)，秩(B)\}$的结论矛盾，故 AB 为不可逆矩阵.

(二)欲证矩阵 A 的行列式不等于零，可设该行列式等于零. 常由此推出矩阵 A 为零矩阵，或推出有 $AX=0$ 有非零解等，得出与题设的矛盾.

例 6 设 A 为 n 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，证明 A 满秩的充要条件是 A^* 为满秩矩阵.

证明一 先证必要性，即证 A^* 为满秩矩阵. 事实上由 $AA^* = |A|E$ 得到 $|A||A^*| = |A|^n$，由题设 A 为满秩矩阵，故 $|A| \neq 0$，显然有 $|A^*| \neq 0$，故 A^* 为满秩矩阵.

再证充分性，即如 A^* 满秩，下证 A 也为满秩矩阵. 用反证法证之. 如 A 为降秩，可分两种情况讨论：

(1) A 为降秩，且 $A=O$，这时有 $A^*=O$，与 A^* 满秩矛盾；

(2) A 为降秩且 $A\neq O$，由 $|A|=0$，得到 $AA^*=|A|E=O$. 又因 A^* 为满秩矩阵，故 $(A^*)^{-1}$ 存在，于是有

$$AA^*(A^*)^{-1}=O\cdot(A^*)^{-1}=O, \text{即 } A=O,$$

这与 $A\neq O$ 矛盾.

由(1)，(2)可知 A 不可能为降秩，因而只能为满秩矩阵.

证明二 充分性及必要性均可利用本节例 4 的结论 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 证之. 读者自行补充证明.

例 7 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，且 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，证明矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 为可逆阵，且求 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 的解向量.

证 如 $A^{\mathrm{T}}A$ 为不可逆矩阵，则 $|A^{\mathrm{T}}A|=0$，于是 $(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，设其任一非零解为 $\boldsymbol{X}_0$，则 $(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$，于是

$$\boldsymbol{X}_0^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}_0=(A\boldsymbol{X}_0)^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{X}_0)=\boldsymbol{0}.$$

因而 $A\boldsymbol{X}_0=\boldsymbol{0}$，故 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，但 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，这是因为 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 有解，且有唯一解. 这矛盾就证明了 $A^{\mathrm{T}}A$ 为可逆矩阵.

又由 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$ 得到 $(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$，而 $A^{\mathrm{T}}A$ 为 n 阶可逆阵，故 $\boldsymbol{X}=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

注意 因 A 为 $m\times n$ 矩阵，它没有逆矩阵，其解 $\boldsymbol{X}\neq A^{-1}\boldsymbol{b}$.

习　题 2.5

1.[1994 年 5] [选择题]设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩

(A) 必有一个等于零.　　(B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n，一个等于 n.　(D) 都等于 n.

2.[1990 年 5]　设 A 是 n 阶可逆阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则____.

(A) $|A^*|=|A|^{n-1}$　　(B) $|A^*|=|A|$

(C) $|A^*|=|A|^n$　　(D) $|A^*|=|A^{-1}|$

3. 证明 $|A|\neq 0$ 的充分必要条件是 A 的特征值不为零.

§2.6　伴随矩阵的几个性质的应用

伴随矩阵的性质及其应用是历届考研的重点内容之一，应牢记其性质，熟练掌握其应用.

设 A 为 n 阶矩阵，其伴随矩阵用 A^* 表示，其转置矩阵用 A^{T} 表示.

(一)性质 $AA^*=A^*A=|A|E$ 的应用

涉及 A 与 A^* 的乘积矩阵有关的命题，A^* 可逆性的命题以及与 A 或 A^* 的行列式的有关命题，可从关系式

$$AA^*=A^*A=|A|E \tag{2.6.1}$$

入手进行计算或论证. 为此必须首先明确 A^* 的定义.

例 1　设 $A=[a_{ij}]$ 为 n 阶矩阵，证明 $(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$.

证明一　根据伴随矩阵 A^* 的定义，由 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 得到

$$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},\text{则}(A^*)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}.$$

再根据伴随矩阵的定义由

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\text{得到}(A^{\mathrm{T}})^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix},$$

故 $$(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}.$$

证明二 由伴随矩阵 A^* 的定义有

$$A^* = [a_{ij}]^* = [A_{ij}]^{\mathrm{T}} = [A_{ji}],$$

故 $$(A^*)^{\mathrm{T}} = [A_{ji}]^{\mathrm{T}} = [A_{ij}].$$

又 $$(A^{\mathrm{T}})^* = ([a_{ij}]^{\mathrm{T}})^* = [a_{ji}]^* = [A_{ij}],$$

故 $$(A^{\mathrm{T}})^* = (A^*)^{\mathrm{T}}.$$

例 2 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$，求 AA^*.

解 易算得 $|A|=1$，故 $AA^*=|A|E=E$.

例 3 若矩阵 A 可逆，则 A^* 也可逆，并求 $(A^*)^{-1}$.

解 因 $AA^*=A^*A=|A|E$，而 A 可逆，$|A|\neq 0$，故

$$\frac{A}{|A|}A^* = A^*\frac{A}{|A|} = E,$$

所以 A^* 可逆，且 $(A^*)^{-1}=A/|A|$.

例 4 设 $A=[a_{ij}]$ 为 n 阶矩阵，满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$，$|A|=1$，证明 $a_{ij}=A_{ij}$.

证明一 因 $|A|=1$，故 $AA^*=|A|E=E$，又 $AA^{\mathrm{T}}=E$，所以 $AA^{\mathrm{T}}=AA^*$ 即 $A(A^{\mathrm{T}}-A^*)=O$.

又因 A 可逆，A^{-1} 存在，于是

$$A^{-1}A(A^{\mathrm{T}}-A^*)=A^{-1}O=O \text{ 即 } A^{\mathrm{T}}=A^*,$$

亦即 $[a_{ij}]^{\mathrm{T}}=[A_{ji}]$，故 $[a_{ij}^{\mathrm{T}}]=[a_{ji}]=[A_{ji}]$，故

$$a_{ij}=A_{ij} \quad (i,j=1,2,\cdots,n).$$

证明二 $AA^{\mathrm{T}}=E$，得到 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，因而

$$A^{\mathrm{T}}=A^{-1}=A^*/|A|=A^* \quad \text{即} \quad [a_{ij}^{\mathrm{T}}]=[A_{ji}],$$

故 $$[a_{ji}]=[A_{ji}] \quad \text{即} \quad a_{ij}=A_{ij} (i,j=1,2,\cdots,n).$$

例 5 设 A 是 $n(n\geqslant 2)$ 阶非零实矩阵，其元素 a_{ij} 与其代数余子式 A_{ij} 相等，求 $|A|$.

解 所求的$|A|$显然与A,A^*有关,应使用$AA^*=|A|E$求之.下面逐一使用所给条件,推出所求结果.

(1)因元素a_{ij}与其代数余子式A_{ij}相等即$a_{ij}=A_{ij}$,故

$$A^*=[A_{ji}]=[A_{ij}]^{\mathrm{T}}=[a_{ij}]^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}},$$

$$AA^*=AA^{\mathrm{T}}=|A|E,|A|^2=|A|^n,即|A|^2(|A|^{n-2}-1)=0,$$

所以$|A|=0$或$|A|^{n-2}=1$.

(2)因A为非零矩阵,即A中至少有一元素不等于0,则

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2>0(i=1,2,\cdots,n).$$

这时$|A|$只满足$|A|^{n-2}=1$,即$|A|$为$x^{n-2}-1=0$的根.

(3)又因A为实矩阵,且$n>2$,则$|A|$为实数,又$x^{n-2}-1=0$的实根只有1与-1,而$|A|>0$,故$|A|=1$.

当然如果$n=2$,则$|A|^{n-2}=1$即$|A|^0=1$,因而$|A|$可以为非零实数.

综上所述,当A满足上述三条件(非零,实矩阵,且$a_{ij}=A_{ij}$)时,如$n>2$则$|A|=1$,如$n=2$则$|A|$为任意非零实数.

由上例得到下述命题:

命题 2.6.1 设A为n阶($n\geqslant3$)实矩阵,其元素分别与其代数余子式相等(即$A^{\mathrm{T}}=A^*$),且其中有一元素不等于零,则该矩阵的行列式$|A|$等于1.

熟悉并记住上述命题,对计算或论证与上述矩阵行列式有关命题带来方便.

例 6[1992 年 5] 已知实矩阵$A=[a_{ij}]_{3\times3}$,满足条件:

(1)$a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$,其中A_{ij}是a_{ij}的代数余子式;

(2)$a_{11}\neq0$,

计算行列式$|A|$.

解法一 显然A满足命题2.6.1的三条件,由该命题迳得

$$|A|=1.$$

下面两解法是直接计算求得结果的.

解法二 因 $a_{ij}=A_{ij}, a_{11}\neq 0$,将 $|A|$ 按第 1 行展开得到

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2\neq 0.$$

另一方面因 $A^*=[A_{ij}]^T=[a_{ij}]^T=A^T$,故

$$AA^*=AA^T=|A|E,$$

所以 $|A|^2=|A|^3$ 即 $|A|^2(|A|-1)=0$,因 $|A|\neq 0$,故 $|A|=1$.

解法三 因 $a_{ij}=A_{ij}$,故 $A^T=A^*$,而 $|A^*|=|A|^{n-1}$[见(2.5.1)式],所以 $|A^T|=|A|=|A|^{n-1}$ 即 $|A|=|A|^{3-1}=|A|^2(n=3)$,从而 $|A|(|A|-1)=0$,而 $|A|\neq 0$,所以 $|A|=1$.

例 7 设 A 为 n 阶实方阵($n\geqslant 3$),若 A 的每个元素 a_{ij} 都等于它自己的代数余子式 A_{ij},且至少有一代数余子式不等于零,则 A 为正交矩阵.

证 显然矩阵满足命题 2.6.1 中的三个条件,故 $|A|=1$. 注意 $A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 有 $A^*=A^T$,于是由 $AA^*=|A|E$ 即得 $AA^T=AA^*=|A|E=E$,故 A 为正交矩阵.

(二)三个公式的应用

$A^*=|A|A^{-1}$(A^* 可用 A^{-1} 来表示,如果 A 可逆); (2.6.2)

$(A^*)^{-1}=(|A|A^{-1})^{-1}=A/|A|$

[$(A^*)^{-1}$ 可用 A 来表示,如果 A^* 可逆]; (2.6.3)

$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

[$(A^*)^*$ 可用 A 来表示][见 §2.1 例 3]. (2.6.4)

例 8[1993 年 5] 已知三阶矩阵 A 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{bmatrix}.$$

试求伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解法一 因当 A^* 可逆时,A^* 的逆矩阵 $(A^*)^{-1}$ 可用 A 来表

示，故先用初等行变换求出 A^{-1}的逆矩阵$(A^{-1})^{-1}=A$，易求得

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&1&0&1&0\\1&1&3&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&5/2&-1&-1/2\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&-1/2&0&1/2\end{array}\right]$$

故 $A=\begin{bmatrix}5/2&-1&-1/2\\-1&1&0\\-1/2&0&1/2\end{bmatrix}$，且易求得$|A|=1/2$，所以

$$(A^*)^{-1}=A/|A|=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

解法二 也可利用伴随矩阵的性质$(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$求之. 为此只须求出 A^{-1}的伴随矩阵即可，事实上由

$$A_{11}=5,\quad A_{21}=-2,\quad A_{31}=-1,$$
$$A_{12}=-2,\quad A_{22}=2,\quad A_{32}=0,$$
$$A_{13}=-1,\quad A_{23}=0,\quad A_{33}=1,$$

得到
$$(A^*)^{-1}=\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

注意 上例如先求 $A=(A^{-1})^{-1}$，再求 A^*，最后求$(A^*)^{-1}$，计算量就很大了.

例 9 已知 n 阶方阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\0&1&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&1\end{bmatrix}.$$

求 A 中所有元素的代数余子式之和$\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}$.

解 显然如果直接求出每个元素 a_{ij}的代数余子式 A_{ij}，再相加求其和比较麻烦. 由于$|A|=1$，A 可逆，因而 $A^*=|A|A^{-1}$. 如能求出 A^{-1}，则 A^*已知，从而将其非零元素相加即得所求的代数

余子式之和．事实上由(2.3.5)式知(或用初等变换求之)：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因而 $A^*=|A|A^{-1}$

$$=1\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix},$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=(A_{11}+A_{22}+\cdots+A_{nn})+(A_{21}+A_{32}+\cdots+A_{n,n-1})=1.$$

例 10[1995 年 5]　设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$，$A^*$为 A 的伴随矩阵，求$(A^*)^{-1}$.

解　因 A^*的逆矩阵$(A^*)^{-1}$可用 A 来表示，只须求出 A 的行列式$|A|=10$，就可得到

$$(A^*)^{-1}=A/|A|=\begin{bmatrix}1/10 & 0 & 0\\ 2/10 & 2/10 & 0\\ 3/10 & 4/10 & 5/10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/10 & 0 & 0\\ 1/5 & 1/5 & 0\\ 3/10 & 2/5 & 1/2\end{bmatrix}.$$

例 11　设 A 是 n 阶方阵，满足 $A^m=E$，其中 m 为正整数，E 为 n 阶单位阵，今将 A 中元素 a_{ij}用其代数余子式 A_{ij}代替得到的矩阵记为 $\tilde{A}$，证明 $\tilde{A}^m=E$.

证　由 $A^m=A\cdot A^{m-1}=E$ 可知，A 为可逆阵，于是 A^*可用 A^{-1}来表示，即 $A^*=|A|A^{-1}$，且$|A^m|=|A|^m=1$. 又由题设有

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=(A^*)^{\mathrm{T}},$$

故 $\quad \widetilde{A}^m=[(|A|A^{-1})^{\mathrm{T}}]^m=[|A|(A^{\mathrm{T}})^{-1}]^m$

$$=|A|^m[(A^m)^{\mathrm{T}}]^{-1}=|A|^m(E^{\mathrm{T}})^{-1}=E.$$

例 12 设 A,B 为 n 阶非奇异矩阵，其伴随矩阵分别为 A^*，B^*，证明

$$(AB)^*=B^*A^*. \tag{2.6.5}$$

证 因 AB 为可逆阵，故 $(AB)^*$ 可用 AB 的逆矩阵 $(AB)^{-1}$ 表示之：

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=(|B|B^{-1})(|A|A^{-1})=B^*A^*.$$

注意 (2.6.5)式对任意 n 阶方阵 A,B 均成立.

(三)伴随矩阵 A^* 的其 他几个性质的应用：

$$(AB)^*=B^*A^*\text{（详见上例）}, \tag{2.6.5}$$

$$(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*\text{（详见本节例 1）}, \tag{2.6.6}$$

$$(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}\text{（详见 § 2.2 例 2）}. \tag{2.6.7}$$

例 13 设 A 为 n 阶可逆阵，证明

$$[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^*=[(A^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}.$$

证明一 $[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^*=[(A^{-1})^*]^{\mathrm{T}}=[(A^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}=[(A^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}$

.

证明二 $(A^*)^{\mathrm{T}}[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^*=(A^*)^{\mathrm{T}}[(A^{-1})^*]^{\mathrm{T}}$

$$=[(A^{-1})^*A^*]^{\mathrm{T}}=[(AA^{-1})^*]^{\mathrm{T}}$$

$$=(E^*)^{\mathrm{T}}=E^{\mathrm{T}}=E,$$

故 $\quad [(A^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(A^{-1})^{\mathrm{T}}]^*.$

(四)伴随矩阵 A^* 的行列式性质及其应用参阅 § 2.11.

(五)伴随矩阵 A^* 的秩的性质及其应用参阅 § 2.13.

习　题 2.6

1. 已知三阶实矩阵 $A=[a_{ij}]$满足条件

1) $a_{ij}=A_{ij}(i,j=1,2,3)$, A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式；2) $a_{33}=-1$.

(1)求 A 的行列式的值；

(2)求方程组 $AX=e_3$ 的解，其中 $e_3=[0,0,1]^T$.

2. 设 A 为 n 阶可逆阵，且 $A^2=|A|E$，证明 $A^*=A$.

3. 设 $A\neq O$ 是一个 n 阶实矩阵，如果 A 的每个元素都是它的代数余子式，则秩 $A=n$.

4. [1996 年 4,5]　[选择题]设 n 阶矩阵 A 为非奇异矩阵($n\geqslant 2$)，则_____.

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$　　　　(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$　　　　(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$

5. [1994 年 1,2]　设 A 为 n 阶非零方阵，A^*是 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

6. 设 $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$, A_{ij}为 a_{ij}的代数余子式，且 $A_{ij}=-a_{ij}(i,j=1,2,3,4)$, $a_{11}\neq 0$，求 A 的行列式 $|A|$.

§2.7　注意区分 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$(α 为向量)哪是数，哪是矩阵

在矩阵运算中常遇到 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$，或 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 的乘积运算，其中 α 为列向量或行向量. 注意分清 $\alpha^T\alpha$ 与 $\alpha\alpha^T$，或 $\alpha\alpha^T$ 与 $\alpha^T\alpha$ 中哪是数，哪是矩阵，对于简化计算是非常重要的.

(一)若 α 为 n 维列向量，设 $\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}$，则

$$\alpha^T\alpha=[x_1\cdots x_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

是一个数，而

$$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}[x_1\cdots x_n]=\begin{bmatrix}x_1x_1 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2x_2 & \cdots & x_2x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_nx_n\end{bmatrix} \quad (2.7.1)$$

为 n 阶矩阵，因此当 α 为列向量时，有

$$\begin{aligned}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\alpha^{\mathrm{T}}&=\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\cdot\alpha)\alpha^{\mathrm{T}}(\text{结合律})\\ &=\alpha^{\mathrm{T}}\alpha(\alpha\cdot\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\text{ 为一个数}).\end{aligned} \quad (2.7.2)$$

值得注意的是要熟练地从右端到左端使用(2.7.1)式，即当给出(2.7.1)式右端矩阵时，要会将它分解成一个列向量 α 与一个行向量 α^{T} 的乘积，这种分解对求解有些问题是非常重要的，是关键所在.

(2.7.1)式的一般形式为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}[y_1y_2\cdots y_n]=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n\end{bmatrix}. \quad (2.7.3)$$

（二）如 α 为 n 维行向量，设 $\alpha=[x_1,\cdots,x_n]$，则

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}[x_1\cdots x_n]=\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2\end{bmatrix} \quad (2.7.4)$$

为 n 阶矩阵，而

$$\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=[x_1\cdots x_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{bmatrix}=x_1^2+\cdots+x_n^2$$

是一个数，因而当 α 为行向量时，有

$$\alpha^{\mathrm{T}}\alpha\cdot\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\alpha^{\mathrm{T}}(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})\alpha=(\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha\alpha^{\mathrm{T}}\text{ 为一数}) \quad (2.7.5)$$

(2.7.2)及(2.7.5)式常用来简化含 $\alpha\alpha^T$(α 为列向量)或 $\alpha^T\alpha$(α 为行向量)的矩阵乘积及其高次幂的计算;也可用来证明其可逆性,对称性,正交性等诸命题.

例 1[选择题] 设 n 维行向量 $\alpha=[1/2,0,\cdots,0,1/2]$,矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha$,$B=E+2\alpha^T\alpha$,其中 E 为 n 阶单位阵,则 AB 等于____.

(A) 0 (B) $-E$ (C) E (D) $E+\alpha^T\alpha$.

解

$$\begin{aligned}AB&=(E-\alpha^T\alpha)(E+2\alpha^T\alpha)\\&=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha\cdot\alpha^T\alpha\\&=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2\alpha^T(\alpha\alpha^T)\alpha.\end{aligned}$$

因 α 为行向量,$\alpha\alpha^T$ 为一个数,且

$$\alpha\alpha^T=[1/2,0,\cdots,0,1/2]\begin{bmatrix}1/2\\0\\\cdots\\0\\1/2\end{bmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

故由(2.7.5)式得到

$$\begin{aligned}AB&=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-2(\alpha\alpha^T)(\alpha^T\alpha)\\&=E-\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha-\alpha^T\alpha=E.\end{aligned}$$

因而(C)对,其余的都不对!

例 2[1994 年 1,2] 设 $\alpha=[1,2,3]$,$\beta=[1,1/2,1/3]$,$A=\alpha^T\beta$,其中 α^T 为 α 的转置,求 A^n.

解 因 $\alpha^T=[1,2,3]^T$,故 $\beta\alpha^T=[1,1/2,1/3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$,且

$$\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1,1/2,1/3]=\begin{bmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{bmatrix}.$$

又因

$$\begin{aligned}A^n&=(\alpha^T\beta)^n=\alpha^T\beta\cdot\alpha^T\beta\cdot\alpha^T\beta\cdots\alpha^T\beta\cdot\alpha^T\beta\\&=\alpha^T\underbrace{(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)}_{n-1\text{ 个 }\beta\alpha^T}\beta,\end{aligned}$$

而 $\beta\alpha^T=3$ 为一个数，由(2.7.5)式得到

$$\begin{aligned}A^n&=(\alpha^T\beta)^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta\\&=3^{n-1}\begin{bmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

注意 如果不用(2.7.5)式如上计算，而是先求 $\alpha^T\beta$，然后计算 $\alpha^T\beta$ 的 n 次方，计算量是相当大的.

例 3 设 $A=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{bmatrix}$

试计算 A^m，其中 m 为正整数.

解 矩阵 A 形如(2.7.3)式右端之矩阵，为简化高次幂 A^m 的计算，首先将其分解为一个列向量与一个行向量的乘积. 为此令

$\alpha=\begin{bmatrix}a_1\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}$，$\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$，则 $A=\alpha\beta$，且

$$\beta\alpha=[b_1,b_2,\cdots,b_n]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\cdots\\a_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^n a_ib_i$$

为一个数，为方便计令 $\lambda=\beta\alpha$，则

$$\begin{aligned}A^m&=(\alpha\beta)^m=\alpha\beta\alpha\beta\alpha\beta\alpha\cdots\beta\alpha\beta\\&=\alpha\underbrace{(\beta\alpha)(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)}_{m-1\text{ 个 }\beta\alpha}\beta\\&=(\beta\alpha)^{m-1}(\alpha\beta)=\lambda^{m-1}\alpha\beta=\lambda^{m-1}A.\end{aligned}$$

例 4 设 α,β 为 n 维列向量，且常数 $c_1\neq0$. 又设 $\beta^T\alpha-c_1^{-1}\neq0$，证明 $A=E-c_1\alpha\beta^T$ 是非奇异矩阵，且

$$A^{-1}=(E-c_1\alpha\beta^T)^{-1}=E-(c_1+2c_2-c_1c_2\beta^T\alpha)\alpha\beta^T,$$

其中 $c_1^{-1}+c_2^{-1}=\beta^T\alpha$，$E$ 为 n 阶单位阵.

证 求解的两问题归结证明

$$(E-c_1\alpha\beta^T)[E-(c_1+2c_2-c_1c_2\beta^T\alpha)\alpha\beta^T]=E.$$

因 $c_1^{-1}+c_2^{-1}=\beta^T\alpha$，故 $c_1c_2\beta^T\alpha=c_1+c_2$，从而

$$c_1+2c_2-c_1c_2\beta^T\alpha=c_2.$$

又 α,β 为列向量，由(2.7.1)式知 $\beta^T\alpha$ 为一数，故由(2.7.2)式得到

$$\begin{aligned}&(E-c_1\alpha\beta^T)[E-(c_1+2c_2-c_1c_2\beta^T\alpha)\alpha\beta^T]\\&=(E-c_1\alpha\beta^T)(E-c_2\alpha\beta^T)\\&=E-c_1\alpha\beta^T-c_2\alpha\beta^T+c_1c_2\alpha\beta^T\alpha\beta^T\\&=E-(c_1+c_2)\alpha\beta^T+(c_1c_2\beta^T\alpha)\alpha\beta^T(\beta^T\alpha\text{ 为一数})\\&=E-(c_1+c_2)\alpha\beta^T+(c_1+c_2)\alpha\beta^T=E.\end{aligned}$$

例 5 设 $A=E-2XX^T$，其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T$. 若 $X^TX=1$，求 A^T,A^2,AA^T,A^TA,AX，并由此证明

(1)A 是对称阵； (2)A 可逆，并求 A^{-1}；

(3)A 是正交阵； (4)X 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量.

证 $A^T=(E-2XX^T)^T=E-2XX^T=A$，故 A 为对称矩阵；

$$A^2=A\cdot A=A\cdot A^T=A^TA$$

而由 $XX^T=1$，得到

$$\begin{aligned}A^2&=(E-2XX^T)(E-2XX^T)\\&=E-2XX^T-2XX^T(E-2XX^T)\\&=E-2XX^T-2XX^T+4X(X^TX)X^T(X^TX=1)\\&=E-4XX^T+4XX^T=E,\end{aligned}$$

即 $A\cdot A=E$，故 A 为可逆阵，且 $A^{-1}=A$.

又由 $AA^T=A^TA=A^2=E$ 可知，A 为正交矩阵. 又

$$AX=(E-2XX^T)X=X-2X(X^TX)=X-2X=-X=(-1)X.$$

因 $X^TX=1\neq0$，故 $X\neq0$，由上式知 X 为 A 的属于特征值 -1 的特征向量.

习　　题 2.7

1. 已知矩阵 $A=\alpha\beta$，其中 $\alpha=[1,2,1]^T$，$\beta=[2,-1,2]$，求矩阵 A，A^2，A^{100}.

2. [1996 年 1,2]　设 $A=E-\xi\xi^T$，其中 E 是 n 阶单位阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 为 ξ 的转置，证明

(1) $A^2=A$ 的充要条件为 $\xi^T\xi=1$；(2) 当 $\xi^T\xi=1$ 时，A 是不可逆矩阵.

3. 设 α 为非零的 n 维列向量，E 为 n 阶单位阵，$H=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T$，证明：(1) H 为对称矩阵；(2) H 为正交矩阵.

4. 已知 n 阶矩阵 A 可逆，x，y 均为 n 维列向量，且 $1+y^TAx\neq 0$. 证明 $A+xy^T$ 可逆，且 $(A+xy^T)^{-1}=A^{-1}-(A^{-1}xy^TA^{-1})/(1+y^TA^{-1}x)$.

§2.8　矩阵分块相乘的条件及常用分块方法

矩阵的分块相乘（分块乘法）要能够进行，必须满足下述两个条件：

(1) 前一（左）矩阵的列块数与后一（右）矩阵的行块数相等；

(2) 前一（左）矩阵的每个列块所含的列数等于后一（右）矩阵对应行块所含的行数.

满足上述两条的分块常称为前一（左）矩阵的列的分法与后一（右）矩阵的行的分法一致，这就是两矩阵分块相乘的条件. 要求这条件成立是由于矩阵的乘法要求前一（左）矩阵的列数等于后一（右）矩阵的行数.

值得注意的是上述条件对前一（左）矩阵的行的分块方法及后一（左）矩阵列的分块方法没有任何要求.

两矩阵 A 与 B 的分块如果满足上述可相乘条件，计算 AB 就可分块相乘，即把 A，B 分块后的小矩阵看成一个“数”按通常的矩阵乘法法则相乘. 这种计算 AB 的方法常称为矩阵的分块相乘法.

例 1 按指定的分块，用矩阵的分块相乘法求下列矩阵之积：

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 \end{array}\right]$$

解 设相乘的两矩阵依次为 A,B，且

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_{21}=[0,3], A_{22}=[2];$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{21}=[0], B_{22}=[-1],$$

则 $$AB=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 0 & -1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

显然 A 的列的分块方法是两个列块，其所含列数分别为 2，1；而 B 的行的分块方法也是两个行块，其所含行数分别为 2，1，因而 A 的列的分块方法与 B 的行的分块方法一致，符合相乘的条件，视小矩阵 $A_{ij},B_{ij}(i,j=1,2)$ 为一个"数"．按照通常的矩阵乘法法则相乘，得到

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

其中 $$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[0]$$

$$=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}=[0\quad 3]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}+[2][0]=[3]=3,$$

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}[-1]$$

$$=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+[2][-1]=[0]+[-2]=[-2].$$

将它们代入上式得到

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\-1 & 1 & 1\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\1 & -2\\3 & -2\end{bmatrix}.$$

满足可相乘条件的矩阵的分块方法有很多，究竟选择什么样的分块方法较合适？这要根据分块后能方便运算及分块后能充分揭示矩阵之间的相互关系(例如矩阵的行向量之间的线性关系等)来确定. 常用的分块方法有下述几种.

分块方法一 尽量分出一些单位阵和零矩阵作为子块，以便于相乘.

例 2 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & 3 & 2\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2\\2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

用矩阵的分块乘法求 AB.

解 根据矩阵 A 的特点，以 2 阶单位阵 E_2 和零矩阵 O_2 作为子块，将矩阵 A 可作如下分块：

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\\hdashline 1 & 0 & 2 & 1\\0 & 1 & 3 & 2\end{array}\right]=\begin{bmatrix}E_2 & O_2\\E_2 & A_{22}\end{bmatrix}(A_{22}\text{为 } A \text{ 中右下角子块}).$$

矩阵 A 分块后，矩阵 B 的分块方法就不能任意了. 根据可相乘条件，B 的行的分法必须与 A 的列的分法一致. 因为 A 的列分成两块(两部分)，每一块(每一部分)都含 2 个列，所以 B 的行也必须分成两块(两部分)，且每一块(每部分)含 2 行. 至于 B 的列的分法可以任意选取，这里将矩阵 B 作如下分块：

$$B=\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&1&2\\2&1&0&0\\ \hdashline 0&0&1&0\\1&1&1&1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}.$$

视 A,B 中的小矩阵为一个数，按通常的矩阵乘法法则得到

$$\begin{aligned}AB&=\begin{bmatrix}E_2&O_2\\E_2&A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{11}+A_{22}B_{21}&B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

而

$$B_{11}+A_{22}B_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\4&3\end{bmatrix},$$

$$B_{12}+A_{22}B_{22}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&3\\5&2\end{bmatrix},$$

故

$$AB=\begin{bmatrix}1&0&1&2\\2&1&0&0\\2&1&4&3\\4&3&5&2\end{bmatrix}.$$

易验证这与矩阵 A,B 直接相乘所得结果是一致的.

例 3[1997 年 3,4] 设 A 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数，记分块矩阵

$$P=\begin{bmatrix}E&O\\-\alpha^TA^*&|A|\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{bmatrix},$$

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位阵.

(1)计算并化简 PQ;

(2)证明:矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^TA^{-1}\alpha\neq b$.

证 (1)显然 P 与 Q 的分块方法符合可相乘的条件，因此可将 P,Q 中小矩阵视为一个数相乘，又由 $A^*A=|A|E,A^*=|A|A^{-1}$，得到

$$PQ=\begin{bmatrix}E&O\\-\alpha^TA^*&|A|\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&\alpha\\\alpha^T&b\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^{T}A^{*}A+|A|\alpha^{T} & -\alpha^{T}A^{*}\alpha+b|A| \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A & \alpha \\ O & |A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha) \end{bmatrix}.$$

(2)由(1)可得

$$|PQ|=|A|^{2}(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha).$$

而$|PQ|=|P|\cdot|Q|$,因$|P|=|A|\neq0$,故由上式即得

$$|Q|=|A|(b-\alpha^{T}A^{-1}\alpha).$$

由此可知,$|Q|\neq0$的充分必要条件为$\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$,即矩阵$Q$可逆的充分必要条件为$\alpha^{T}A^{-1}\alpha\neq b$.

分块方法二 将乘积矩阵AB的前一(左)矩阵A施行列分块,以表示出AB的列向量与A的列向量之间的线性关系.

例4 设$A=[a_{ij}]_{r\times n}$,$B=[b_{ij}]_{n\times m}$,将A及AB均施行列分块,令

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{r1} \end{bmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ \cdots \\ a_{r2} \end{bmatrix},\cdots,\boldsymbol{A}_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \cdots \\ a_{rn} \end{bmatrix},\text{则 } A=[\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n].$$

又令 $AB=[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m]$,则

$$[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{c}_m]=AB=[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n]\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{n}b_{i1}\boldsymbol{A}_i,\sum_{i=1}^{n}b_{i2}\boldsymbol{A}_i,\cdots,\sum_{i=1}^{n}b_{im}\boldsymbol{A}_i\right],$$

从而$\boldsymbol{c}_j=\sum\limits_{i=1}^{n}b_{ij}\boldsymbol{A}_i(j=1,2,\cdots,m)$,这就表明$AB$的$m$个列向量为$A$的$n$个列向量的线性组合.

例5 若矩阵A的秩为r,其r个列向量为某一齐次线性方程组的一个基础解系,B为r阶非奇异矩阵.证明AB的r个列向量也是该齐次线性方程组的一个基础解系.

证 设 A 为 $n\times r$ 矩阵，其列向量记为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$；AB 的列向量记为 $c_1,c_2,\cdots,c_r$，则

$$[c_1,c_2,\cdots,c_r]=AB=[A_1,A_2,\cdots,A_r]B,$$

即 AB 的 r 个列向量为 A 的 r 个列向量的线性组合(参阅上例)。因 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 为某一齐次线性方程组的解，故其线性组合，AB 的 r 个列向量，也是该方程组的解. 又因 B 可逆，故

$$[A_1,A_2,\cdots,A_r]=[c_1,c_2,\cdots,c_r]B^{-1}.$$

从而 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 也是 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 的线性组合，所以 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 与 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 等价. 等价必等秩，而 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 线性无关，故 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 也线性无关. 于是 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 即 AB 的 r 个列向量为该齐次线性方程组的一个基础解系.

例 6 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times n}$. 又令

$$A^{(k)}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_{nk} \end{bmatrix},k=1,2,\cdots,n.$$

试证存在矩阵 C，使 $AC=B$ 的充要条件为

$$秩 A=秩(A^{(k)}) \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

证 (1)先证必要性. 若有 C 使 $B=AC$，令

$$C=[c_{ij}]_{n\times n},A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n],B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n],$$

其中 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为 A,B 的列向量. 由

$$B=AC \quad 即 \quad B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]C$$

便有
$$\beta_k=c_{1k}\alpha_1+c_{2k}\alpha_2+\cdots+c_{nk}\alpha_n,k=1,2,\cdots,n,$$

故秩 $A=$秩$(A^{(k)})$.

(2)下证充分性. 若秩 $A=$秩$(A^{(k)})(k=1,2,\cdots,n)$，则 $\beta_k=[b_{1k},b_{2k},\cdots,b_{nk}]^{\mathrm{T}}$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出：

$$\beta_k=c_{1k}\alpha_1+c_{2k}\alpha_2+\cdots+c_{nk}\alpha_n(k=1,2,\cdots,n).$$

令 $C=[c_{ij}]_{n\times n}$，便有 $B=AC$.

注意 由上两例可知,考察乘积矩阵 $C=AB$ 与其左矩阵 A 的向量之间关系,必须将 C 与 A 看成一行的矩阵,这样矩阵等式 $C=AB$ 两端都是一行向量,且左端行向量为右端的线性组合.这就决定了 C 与 A 必须列分块.

分块方法三 将乘积矩阵 AB 的后一矩阵 B 施行行分块,以表示出 AB 的行向量与 B 的行向量之间的线性关系.

例 7 设 $A=[a_{ij}]_{r\times n}$,$B=[b_{ij}]_{n\times m}$,将 B 及 AB 施行行分块.令 $\boldsymbol{B}_i=[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{im}]$$(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{B}_n\end{bmatrix};\text{又令 } AB=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{G}_r\end{bmatrix},\text{则}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{G}_r\end{bmatrix}=AB=A\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{B}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}\boldsymbol{B}_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}\boldsymbol{B}_j\\ \cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{rj}\boldsymbol{B}_j\end{bmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{G}_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{B}_j(i=1,2,\cdots,r)$.这就表明 AB 的 r 个行向量是 B 的 n 个行向量的线性组合.

例 8 证明秩$(AB)\leqslant$秩 B.

证 设 $A=[a_{ij}]_{r\times n}$,$B=[b_{ij}]_{n\times m}$.将 AB 及 B 施行行分块,如上例得到

$$AB=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1\\ \boldsymbol{G}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{G}_r\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \cdots\\ \boldsymbol{B}_n\end{bmatrix},$$

且$G_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}B_j(i=1,2,\cdots,r)$. 因 $G_1,G_2,\cdots,G_r$ 可以由 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 线性表出,因此

$$秩[G_1,G_2,\cdots,G_r]\leqslant 秩[B_1,B_2,\cdots,B_n],$$

即

$$秩(AB)\leqslant 秩 B.$$

例 9 如果两个 $m\times n$ 矩阵 A 和 B 的行向量形成同一线性齐次方程组的基础解系,试证明必存在一个 m 阶可逆矩阵 C,使 $A=CB$.

证 设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_m\end{bmatrix}$,其中 $\alpha_i,\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$分别是 A,B 的行向量. 又因它们都是同一齐次线性方程组的基础解系,故可互相线性表示. 设

$$\begin{aligned}\alpha_1&=c_{11}\beta_1+c_{12}\beta_2+\cdots+c_{1m}\beta_m,\\ \alpha_2&=c_{21}\beta_1+c_{22}\beta_2+\cdots+c_{2m}\beta_m,\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad,\\ \alpha_m&=c_{m1}\beta_1+c_{m2}\beta_2+\cdots+c_{mm}\beta_m,\end{aligned}$$

即

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_m\end{bmatrix}.$$

令 $C=[c_{ij}]_{m\times m}$,便有 $A=CB$.

又因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关,故秩 $C=m$,即 C 为可逆矩阵.

注意 由上两例可知,考察乘积矩阵 $C=AB$ 与其右矩阵 B 的向量之间关系,必须将 C 与 B 看成一列的矩阵,这样矩阵等式 $C=AB$ 两端都是一列向量,且左端列向量为右端的线性组合,这就决定了 C 与 B 必须行分块.

分块方法四 将 AB 的前一(左)矩阵 A 的列和行都分成一块,后一(右)矩阵 B 的行也分成一块,但列可按一列一块分成若干块,于是 AB 的列向量可表成 A 同 B 的列向量相乘.

例 10 设 A 为 $r\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，设 B 的列向量组是 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_m$，证明

$$AB=[A\boldsymbol{B}_1,A\boldsymbol{B}_2,\cdots,A\boldsymbol{B}_m].$$

证 因 $B=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_m]$，故 $AB=A[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_m]$.

这里 AB 中的前一(左)矩阵 A 分成一个列块，此列块含 n 个列，而后一(右)矩阵 B 的行也分成一块，此块含 n 个行，符合矩阵的分块相乘的两条件，故可分别视 A 及 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n$ 的为一个数，相乘得到

$$AB=A[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]=[A\boldsymbol{B}_1,A\boldsymbol{B}_2,\cdots,A\boldsymbol{B}_n].$$

例 11 证明 $AB=O$ 的充分必要条件是 B 的每个列向量都是齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量.

证 设 B 的列向量组是 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n$，由上例得到

$$AB=[A\boldsymbol{B}_1,A\boldsymbol{B}_2,\cdots,A\boldsymbol{B}_n].$$

于是有

$$\begin{aligned} AB=O &\leftrightarrow [A\boldsymbol{B}_1,A\boldsymbol{B}_2,\cdots,A\boldsymbol{B}_n]=O \\ &\leftrightarrow A\boldsymbol{B}_1=\mathbf{0},A\boldsymbol{B}_2=\mathbf{0},\cdots,A\boldsymbol{B}_n=\mathbf{0} \\ &\leftrightarrow \boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n \text{ 都是 } AX=\mathbf{0} \text{ 的解向量.} \end{aligned}$$

分块方法五 为将互为转置的两矩阵的乘积矩阵 $A^{\mathrm{T}}A$(或 AA^{T})的元素表为其行向量与列向量的乘积，常将 A 按列(或行)分块. 设

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\quad\left(\text{或 } A=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{bmatrix}\right),\text{则}$$

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}(\text{或 } A^{\mathrm{T}}=[\beta_1^{\mathrm{T}}\cdots\beta_n^{\mathrm{T}}]),$$

且

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\alpha_1\cdots\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{bmatrix}$$

$$\left(\text{或 } AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{bmatrix}[\beta_1^{\mathrm{T}}\cdots\beta_n^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}\beta_1\beta_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \beta_1\beta_n^{\mathrm{T}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_n\beta_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \beta_n\beta_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right).$$

应用上述两等式时，既能从左端化到右端，也能从右端写出左端.

例 12 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，若 $A^{\mathrm{T}}A=O$，则 $A=O$.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的 n 个列向量，即 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\text{且 } A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}[\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n]=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_1^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{\mathrm{T}}\alpha_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_1 & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_2 & \cdots & \alpha_n^{\mathrm{T}}\alpha_n\end{bmatrix}.$$

由 $A^{\mathrm{T}}A=O$，得 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，又因 A 为实矩阵，故 $\alpha_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故 $A=O$.

例 13[1994 年 1,2] 设 A 为 n 阶非零方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^{T} 为 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^{\mathrm{T}}$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

证明一 如 $|A|=0$，则 $AA^*=AA^{\mathrm{T}}=|A|E=O$，设 A 的 n 个行向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，即 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}}=[\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}}]$，且

$$AA^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}[\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_1\alpha_n^{\mathrm{T}}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n\alpha_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=O.$$

于是 $\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}=\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}=\cdots=\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}=0$，故

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0,\text{即 } A=O.$$

这与 $A\neq O$ 矛盾，故 $|A|\neq 0$.

证明二 由 $A^*=A^{\mathrm{T}}$，即 $\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{1n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ 得

到 $A_{ij}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，又由题设知 $A\neq O$，即 A 中至少有一元素 $a_{it}\neq 0(1\leqslant i,t\leqslant n)$，将 $|A|$ 按第 i 行展开，由 $A_{ij}=a_{ij}$，得到

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$$
$$=a_{i1}^2+\cdots+a_{i,t-1}^2+a_{it}^2+a_{i,t+1}^2+\cdots+a_{in}^2\neq 0(\text{因 } a_{it}\neq 0).$$

习　　题　2.8

1. 用矩阵的分块相乘计算

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{bmatrix}.$$

2. 证明　秩$(AB)\leqslant$秩 A.

3. 已知 A,P 为 n 阶矩阵，且 $P=[\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n]$，

$$AP=P\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix},$$

证明　$A\boldsymbol{P}_i=\lambda_i\boldsymbol{P}_i(i=1,2,\cdots,n)$.

4. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $m\times p$ 矩阵，且 $B=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_p]$，$X$ 为 $n\times p$ 矩阵，且 $X=[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_p]$，证明

$$AX=B\leftrightarrow A\boldsymbol{X}_i=\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,p).$$

5. 假如 A,P 都是 n 阶矩阵，P 的 n 个行向量为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_n$，即 $P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1\\\boldsymbol{P}_2\\\cdots\\\boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}$，证明(1)$PA=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1A\\\boldsymbol{P}_2A\\\cdots\\\boldsymbol{P}_nA\end{bmatrix}$；(2)$\begin{bmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{bmatrix}P=\begin{bmatrix}a_1\boldsymbol{P}_1\\a_2\boldsymbol{P}_2\\\cdots\\a_n\boldsymbol{P}_n\end{bmatrix}$.

6. [1991 年 4]　试证明 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_1&\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_2&\cdots&\alpha_1^{\mathrm T}\alpha_n\\\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_1&\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_2&\cdots&\alpha_2^{\mathrm T}\alpha_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_n^{\mathrm T}\alpha_1&\alpha_n^{\mathrm T}\alpha_2&\cdots&\alpha_n^{\mathrm T}\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 α_i^T 表示列向量 α_i 的转置($i=1,2,\cdots,n$).

§2.9 分块矩阵求逆法

本节讨论形如

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{bmatrix}$$

与 $$M=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ O & A_{22} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} O & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & O \end{bmatrix}$$

的分块矩阵的逆矩阵的求法.

一般,若所给矩阵为上述形状的分块矩阵,用分块矩阵求逆较方便,可简化计算.

方法一 公式法

下述两类分块矩阵可直接按公式计算.

若 $$A=\begin{bmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_r \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} O & \cdots & O & B_1 \\ O & \cdots & B_2 & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_r & \cdots & O & O \end{bmatrix},$$

且子方块 A_i 与 $B_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均可逆,则 A,B 可逆,且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & A_2^{-1} & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & A_r^{-1} \end{bmatrix}; \qquad (2.9.1)$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix} O & \cdots & O & B_r^{-1} \\ O & \cdots & B_{r-1}^{-1} & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_1^{-1} & \cdots & O & O \end{bmatrix}. \qquad (2.9.2)$$

例 1[1991 年 1,2] 设 A 为下列 4 阶矩阵,求 A^{-1}:

$$A=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

解 令 $A_1=\begin{bmatrix}5&2\\2&1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}1&-2\\1&1\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{bmatrix}$，因 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&5\end{bmatrix}$, $A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1/3&2/3\\-1/3&1/3\end{bmatrix}$，故由(2.9.1)式得到

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&1/3&2/3\\0&0&-1/3&1/3\end{bmatrix}.$$

例 2[1994 年 4,5] 设 $A=\begin{bmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq0, i=1,2,\cdots,n$，求 A^{-1}.

解 令 $A_1=\begin{bmatrix}a_1&0\cdots0\\0&a_2\cdots0\\\cdots&\cdots\cdots\cdots\\0&0\cdots a_n\end{bmatrix}$, $A_2=[a_n]$，则 $A=\begin{bmatrix}O&A_1\\A_2&O\end{bmatrix}$.

因 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix}a_1^{-1}&0&\cdots&0\\0&a_2^{-1}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_n^{-1}\end{bmatrix}$, $A_2^{-1}=[a_n^{-1}]$，由(2.9.2)式得到

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}O&A_2^{-1}\\A_1^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1/a_n\\1/a_1&0&\cdots&0&0\\0&1/a_2&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1/a_n&0\end{bmatrix}.$$

例 3[1988 年 4,5]　设 B 为下列 4 阶矩阵,求 B^{-1}:

$$B=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解法一　令 $B_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$B_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,则 $B=\begin{bmatrix}O&B_1\\B_2&O\end{bmatrix}$. 又 $B_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,$B_2^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$,由(2.9.2)式即得

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}O&B_2^{-1}\\B_1^{-1}&O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

解法二　令 $B_1=[1]$,$B_2=[1]$,$B_3=[1]$,$B_4=[1]$,则由(2.9.2)式得到

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&B_1\\0&0&B_2&0\\0&B_3&0&0\\B_4&0&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&B_4^{-1}\\0&0&B_3^{-1}&0\\0&B_2^{-1}&0&0\\B_1^{-1}&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

注意　求 $B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&b_1\\0&0&\cdots&b_2&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&b_{n-1}&\cdots&0&0\\b_n&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$的逆矩阵的最简方法是令 $B_i=[b_i]$,则 $B_i^{-1}=[1/b_i]$($b_i\neq0,i=1,2,\cdots,n$),由(2.9.2)式

即得

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & B_1\\ 0 & \cdots & B_2 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_n & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & B_n^{-1}\\ 0 & \cdots & B_{n-1}^{-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_1^{-1} & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1/b_n\\ 0 & \cdots & 1/b_{n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1/b_1 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

例 4 求下列矩阵的逆矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

解 设 $A=\begin{bmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{bmatrix}$，其中 $A_1=\begin{bmatrix}n & 0\\ 0 & n-1\end{bmatrix}$，$A_2$ 为 $n-2$ 阶矩阵. 先求 A_2^{-1}. 仿上例解法二的方法，由(2.9.2)式，得到

$$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1/(n-2)\\ 0 & 0 & \cdots & 1/(n-3) & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由(2.9.1)式得到 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix}1/n & 0\\ 0 & 1/(n-1)\end{bmatrix}$，故

$$A=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ O & A_2^{-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1/(n-1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/(n-2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

方法二　解矩阵方程组法

为求分块矩阵 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$的逆矩阵 A^{-1}，常设 $A^{-1}=X=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$，由 $AA^{-1}=AX=E$ 解出 $X_{ij}(i,j=1,2)$.

例 5[2.22][1991 年 4]　设 n 阶方阵 B_1 及 s 阶矩阵 B_2 都可逆，求 $B=\begin{bmatrix}O & B_1\\ B_2 & O\end{bmatrix}$的逆矩阵 B^{-1}.

解　令 $B_1=B_{n\times n}, B_2=B_{s\times s}$，则 $B=\begin{bmatrix}O_{n\times s} & B_{n\times n}\\ B_{s\times s} & O_{s\times n}\end{bmatrix}$，其逆矩阵也为分块矩阵，且其子块的行数与列数，根据分块矩阵可相乘条件应为 $X^{-1}=\begin{bmatrix}X_{s\times n} & X_{s\times s}\\ X_{n\times n} & X_{n\times s}\end{bmatrix}$. 由 $BX^{-1}=E$，得

$$\begin{bmatrix}O_{n\times s} & B_{n\times n}\\ B_{s\times s} & O_{s\times n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{s\times n} & X_{s\times s}\\ X_{n\times n} & X_{n\times s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{n\times n} & O_{n\times s}\\ O_{s\times n} & X_{s\times s}\end{bmatrix},$$

即
$$\begin{bmatrix}B_{n\times n}X_{n\times n} & B_{n\times n}X_{n\times s}\\ B_{s\times s}X_{s\times n} & B_{s\times s}X_{s\times s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{n\times n} & O_{n\times s}\\ O_{s\times n} & X_{s\times s}\end{bmatrix}.$$

于是有

$$\begin{cases}B_{n\times n}X_{n\times n}=E_{n\times n},\\ B_{n\times n}X_{n\times s}=O_{n\times s},\\ B_{s\times s}X_{s\times n}=O_{s\times n},\\ B_{s\times s}X_{s\times s}=X_{s\times s},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X_{n\times n}=B_{n\times n}^{-1}=B_1^{-1},\\ X_{n\times s}=O_{n\times s}(\text{两端左乘 } B_{n\times n}^{-1}),\\ X_{s\times n}=O_{s\times n}(\text{两端左乘 } B_{s\times s}^{-1}),\\ X_{s\times s}=B_{s\times s}^{-1}=B_2^{-1},\end{cases}$$

故
$$X^{-1}=\begin{bmatrix}O & B_1\\ B_2 & O\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}O & B_2^{-1}\\ B_1^{-1} & O\end{bmatrix}.$$

例 6 已知 A_1,A_4 分别为 m,n 阶可逆矩阵，证明

$$M_1=\begin{bmatrix}A_1 & O\\ A_3 & A_4\end{bmatrix} \tag{2.9.3}$$

可逆，并求 M_1^{-1}.

证 因为 M_1 为分块下三角阵，其逆矩阵如存在，则仍为分块下三角阵，且其主对角线上的分块矩阵为 M_1 主对角线上相应分块矩阵的逆矩阵，故可设

$$\begin{bmatrix}A_1 & O\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ X_3 & A_4^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_m & O\\ O & E_n\end{bmatrix}.$$

将等式左端乘开，比较对应元素得

$$A_3A_1^{-1}+A_4X_3=O,\text{即 } X_3=-A_4^{-1}A_3A_1^{-1},$$

故
$$M_1^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ -A_4^{-1}A_3A_1^{-1} & A_4^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.9.4}$$

值得注意的是(2.9.4)式可作为公式记忆. 利用它可简便地求出该类分块矩阵的逆矩阵.

为便于记忆，将(2.9.3)与(2.9.4)两式比较，按下述步骤由 M_1 可直接写出 M_1^{-1}.

(1)M_1 主对角线上的子块由左到右为 A_1,A_4，而 M_1^{-1} 的主对角线上的子块由左到右为 A_1^{-1},A_4^{-1}；

(2)M_1 右上方为零子块，而 M_1^{-1} 右上方也为零子块，M_1 左下方为非零子块，而 M_1^{-1} 左下方也是非零子块；

(3)M_1 中按顺时针方向，非零三子块连续次序为 $A_4\to A_3\to A_1$，而 M_1^{-1} 中左下方非零三子块连乘积的次序为 $A_4^{-1}\to A_3\to A_1^{-1}$，不过连乘积要带负号，即

$$M_1^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & O\\ -A_4^{-1}A_3A_1^{-1} & A_4^{-1}\end{bmatrix}.$$

按上述三步写出 M_1^{-1} 的方法称为顺着 M_1 写出 M_1^{-1} 的方法.

可逆子块在主对角线上的分块矩阵还有

$$M_2=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ O & A_4\end{bmatrix}\quad (A_1,A_4\text{ 可逆}). \tag{2.9.5}$$

如按上述顺着 M_2 写出 M_2^{-1} 的方法立即可得

$$M_2^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2A_4^{-1}\\ O & A_4^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.9.6}$$

对可逆子矩阵位于次对角线上的分块矩阵

$$M_3=\begin{bmatrix}O & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}\quad (A_2,A_3\text{ 可逆}), \tag{2.9.7}$$

易证 M_3 可逆，且

$$M_3^{-1}=\begin{bmatrix}-A_3^{-1}A_4A_2^{-1} & A_3^{-1}\\ A_2^{-1} & O\end{bmatrix}. \tag{2.9.8}$$

下面比较(2.9.7)，(2.9.8)两式可直接写出 M_3^{-1}：

(1)M_3 次对角线(自右上方到左下方)上的子块为 A_2,A_3，而 M_3^{-1} 次对角线上子块为 A_3^{-1},A_2^{-1}(子块排列次序与 M_3 相反)；

(2)M_3 的零子块位于左上方，而 M_3^{-1} 的零子块位于右下方(与 M_3 相反)，M_3 的非零子块位于 M_3 的右下方，而 M_3^{-1} 的却位于左上方(与 M_3 也相反)；

(3)M_3 中按逆时针(注意不是顺时针)方向，非零三子块的连续次序为 $A_3\to A_4\to A_2$，而 M_3^{-1} 中左上方非零三子块的连乘积为 $A_3^{-1}A_4A_2^{-1}$，且带负号，因而得到(2.9.8)式.

上述由 M_3 直接写出 M_3^{-1} 的方法称为逆着 M_3 写出 M_3^{-1} 的方法.

可逆分块子块位于次对角线上的另一情况是

$$M_4=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & O\end{bmatrix}\quad (A_2,A_3\text{ 可逆}). \tag{2.9.9}$$

按上述逆着 M_4 的方法写出 M_4^{-1} 为

$$M_4^{-1}=\begin{bmatrix}O & A_3^{-1}\\ A_2^{-1} & -A_2^{-1}A_1A_3^{-1}\end{bmatrix}. \tag{2.9.10}$$

例 7 求下列矩阵的逆矩阵：

$$M_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&2&0&0\\3&7&2&3\\2&5&1&2\end{bmatrix}.$$

解 设 $A_1=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}$，$A_2=O$，$A_3=\begin{bmatrix}3&7\\2&5\end{bmatrix}$，$A_4=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$，则 A_1,A_4 可逆. 由两调一除的方法易得

$$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix},A_4^{-1}=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}.$$

由(2.9.4)式即得

$$\begin{bmatrix}A_1^{-1}&O\\-A_4^{-1}A_3A_1^{-1}&A_4^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&2&-3\\1&-2&-1&2\end{bmatrix}.$$

习　题　2.9

1. 试证下列矩阵 A，当 $a_n\neq0$ 时可逆，并求 A^{-1}：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&-a_n\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\end{bmatrix}.$$

2. 设 $A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\O&A_{22}\end{bmatrix}$，其中 A_{ij}是 $n_i\times n_j$ 矩阵，证明 A 可逆的充要条件是 A_{11},A_{22}为可逆矩阵，并求 A^{-1}.

3. [1989 年 1,2][填空题] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{bmatrix}$，$E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，则逆矩阵$(A-2E)^{-1}=$______.

4. 用分块求逆的方法，求下列 6 阶矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1}：

$$M=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&1&0&0\end{bmatrix}.$$

§2.10 (反)对称矩阵的证法

(一)对称矩阵的证法

法一 根据定义证明,即证 $A^{\mathrm{T}}=A$.

证明中常用到矩阵的下列转置性质:

$$(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A,(A\pm B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\pm B^{\mathrm{T}},(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}},$$

$$(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}(\lambda\text{ 为常数}),(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k(k\text{ 为正整数}).$$

例 1[2.9] 设 A 为 m 阶对称矩阵,P 为任意 m 阶矩阵,证明 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为对称矩阵.

证 设 $B=P^{\mathrm{T}}AP$,根据矩阵的上述转置性质及 $A^{\mathrm{T}}=A$,得到

$$B^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}AP)^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}AP=B.$$

例 2 设 A 为对称矩阵,$f(x)$为多项式,试证

$$\lambda A(\lambda\text{ 为常数}),A^k(k\text{ 为正整数}),f(A)$$

仍为对称矩阵.

证 由上述矩阵的转置性质及 $A^{\mathrm{T}}=A$,得到

1)$(\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}}=\lambda A$, 2)$(A^k)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^k=A^k$,

3)设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,则

$$f(A)=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE.$$

利用 1)与 2)的结论,得到

$$[f(A)]^{\mathrm{T}}=(a_0A^n)^{\mathrm{T}}+(a_1A^{n-1})^{\mathrm{T}}+\cdots+(a_{n-1}A)^{\mathrm{T}}+(a_nE)^{\mathrm{T}}$$

$$=a_0(A^T)^n+a_1(A^T)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A^T+a_nE^T$$
$$=a_0A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nE=f(A).$$ 证毕

证明与逆矩阵有关的矩阵为对称矩阵，常用到下述性质：

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*.$$

例 3 设 A 为对称矩阵，试证 A^{-1} 也为对称矩阵.

证 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$.

例 4 设 A^{-1} 为对称矩阵，试证 A 也是对称矩阵.

证明一 $A=(A^{-1})^{-1}=[(A^{-1})^T]^{-1}=[(A^T)^{-1}]^{-1}=A^T$.

证明二 $A^T=[(A^T)^{-1}]^{-1}=[(A^{-1})^T]^{-1}=(A^{-1})^{-1}=A$.

证明三 $AA^{-1}=E$，取转置得 $(A^{-1})^TA^T=E$ 即 $A^{-1}A^T=E$，故

$$A^T=(A^{-1})^{-1}=A.$$

证明四 由题设 $(A^{-1})^T=A^{-1}$. 得到 $(A^T)^{-1}=A^{-1}$，等式两端求逆即得 $A^T=A$.

法二 由上例，如能证 A^{-1} 为对称矩阵，则 A 也对称.

例 5 设 A 为 n 阶对称可逆矩阵，B 为 n 阶对称矩阵，当 $E+AB$ 可逆时，试证 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

证明一 因 A 和 $E+AB$ 可逆，故 $(E+AB)^{-1}A$ 可逆，为证它是对称矩阵，只须证它的逆矩阵为对称矩阵. 事实上

$$[(E+AB)^{-1}A]^{-1}=A^{-1}(E+AB)=A^{-1}+B.$$

下证 $A^{-1}+B$ 为对称矩阵，因为

$$(A^{-1}+B)^T=(A^{-1})^T+B^T=A^{-1}+B,$$

故 $A^{-1}+B$，从而 $[(E+AB)^{-1}A]^{-1}$ 为对称矩阵，于是其逆矩阵 $(E+AB)^{-1}A$ 为对称矩阵.

证明二 利用转置矩阵及逆矩阵的有关性质，根据定义证之.

$$[(E+AB)^{-1}A]^T=A^T[(E+AB)^{-1}]^T$$
$$=A[(E+AB)^T]^{-1}=A(E+B^TA^T)^{-1}$$
$$=A(E+BA)^{-1}=(A^{-1})^{-1}(E+BA)^{-1}$$
$$=[(E+BA)A^{-1}]^{-1}=(A^{-1}+B)^{-1}$$
$$=(A^{-1}+A^{-1}AB)^{-1}=[A^{-1}(E+AB)]^{-1}$$

$$=(E+AB)^{-1}(A^{-1})^{-1}=(E+AB)^{-1}A.$$

例 6 A 可逆，如 A^* 为对称矩阵，试证 A 为对称矩阵.

证明一 下证 A^{-1} 为对称矩阵. 事实上，因 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*$，故

$$(A^{-1})^{\mathrm{T}}=[|A|^{-1}A^*]^{\mathrm{T}}=|A|^{-1}A^*=A^{-1}.$$

证明二

$$\begin{aligned}A&=(A^{-1})^{-1}=(|A|^{-1}A^*)^{-1}\\&=[(|A|^{-1}A^*)^{\mathrm{T}}]^{-1}=[(|A|^{-1}A^*)^{-1}]^{\mathrm{T}}\\&=[(A^{-1})^{-1}]^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

证明三 由 $(A^*)^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^*$，$(A^*)^{\mathrm{T}}=A^*$，得到 $A^*=(A^{\mathrm{T}})^*$. 又 A 可逆，故 $A^*=|A|A^{-1}$. 于是有

$$|A|A^{-1}=|A^{\mathrm{T}}|(A^{\mathrm{T}})^{-1}，\text{即 } A^{-1}=(A^{\mathrm{T}})^{-1} \text{亦即 } A=A^{\mathrm{T}}.$$

例 7 满足 $A^2=E$ 的正交矩阵 A 必是对称矩阵.

证 因 $A^2=A\cdot A=E$，故 $A^{-1}=A$，又 A 为正交矩阵，故 $A^{-1}=A^{\mathrm{T}}$，从而 $A=A^{\mathrm{T}}$.

例 8 假设 n 阶实矩阵 A 有 n 个两两正交的特征向量，试证 A 是对称矩阵.

证 设 A 的 n 个两两正交的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 必为 n 个线性无关的特征向量，故 A 与对角阵相似. 将 A 的 n 个特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 单位化得 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，因 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 仍为 A 的 n 个线性无关的特征向量，故可令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$，则 Q 为正交矩阵，从而 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$，于是由

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)^*$$

得到

$$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{\mathrm{T}}.$$

由本节例 1 知，A 为对称矩阵. 证毕

对称矩阵是常用的一类矩阵，现将对称矩阵 A 和 B 经运算后所得矩阵的对称性总结如下表：

* $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 表示主对角线上元素为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的对角矩阵. 下同.

运算后的矩阵	kA(k 不为 0)	A^k(k 为自然数)	$A+B$	$f(A)$(A 的多项式)
对称性	对称	对称	对称	对称

运算后的矩阵	A^{-1}(A 可逆)	P^TAP	A^T	A^*	AB
对称性	对称	对称	对称	对称	不确定

(二)反对称矩阵的证法

根据定义证之,即证 $A=-A^T$.

例 9 若 A 为方阵,证明 $A+A^T$ 为对称矩阵,$A-A^T$ 为反对称矩阵.

证 下只证 $A-A^T$ 为反对称矩阵.事实上

$$(A-A^T)^T=A^T+(-A^T)^T=A^T-A=-(A-A^T).$$

例 10 设 A 为 n 阶矩阵,且 $|A|\neq 0$,若 A^* 是反对称矩阵,则 A^T 也是反对称矩阵.

证 $|A|\neq 0$,故秩 $A=n$,由 §2.13 例 2 可知,秩$(A^*)=n$,即 A^* 为可逆矩阵.由 $AA^*=|A|E$,得到 $A=(|A|^{-1}A^*)^{-1}=|A|(A^*)^{-1}$,故

$$\begin{aligned}A^T&=|A|[(A^*)^{-1}]^T=|A|[(A^*)^T]^{-1}\\&=|A|(-A^*)^{-1}=-A.\end{aligned}$$

例 11 设 A 为反对称矩阵,B 为对称矩阵,试证 $AB-BA$ 为对称阵.

证明一 由题设知 $A^T=-A,B^T=B$,故

$$\begin{aligned}(AB-BA)^T&=(AB)^T-(BA)^T=B^TA^T-A^TB^T\\&=-BA+AB=AB-BA.\end{aligned}$$

证明二 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n},B=[b_{ij}]_{n\times n}$,由题设有

$$a_{ij}=-a_{ji},b_{ij}=b_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

又设 $AB-BA=C=[c_{ij}]_{n\times n}$,下证 $c_{ij}=c_{ji}$.

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}-\sum_{k=1}^{n}b_{ik}a_{kj}=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}-b_{ik}a_{kj})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-a_{ki}b_{jk}+b_{ki}a_{jk})=\sum_{k=1}^{n}(a_{jk}b_{ki}-b_{jk}a_{ki})=c_{ji}.$$

注意 证明一比较简明，证明二比较繁琐，且利用 Σ 符号，但熟悉矩阵元素之间的关系和求和符号 Σ 的运算也是很有必要的.

例 12 A 为 n 阶反对称矩阵，则当 n 为偶数时，A^* 仍为反对称矩阵，当 n 为奇数时，A^* 为对称矩阵.

证 $(A^*)^T=(A^T)^*=(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$.

(1)当 n 为偶数时，由上式得到$(A^*)^T=-A^*$，

(2)当 n 为奇数时，由上式得到$(A^*)^T=A^*$. 证毕

注意 上面推导利用$(kA)^*=k^{n-1}A^*$[见(2.1.3)式].

例 13 (1)证明一对称矩阵如果又为反对称矩阵时，则该矩阵为零矩阵；

(2)任一方阵可唯一地表为对称矩阵与一反对称矩阵之和；

(3)试将下列矩阵 A 分解成对称矩阵与反对称矩阵之和：

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & -2 & 3\\ 3 & 2 & 1 & 5\end{bmatrix}.$$

解 (1)$A^T=A$，$A^T=-A$，得到 $A=-A$，故 $A=O$.

(2)$A=(A+A^T)/2+(A-A^T)/2$，由例 9 知$(A+A^T)/2$ 为对称矩阵，$(A-A^T)/2$ 为反对称矩阵. 下证表法唯一.

设表法不唯一：$A=B_1+C_1=B_2+C_2$，其中 B_1,B_2 是对称矩阵，C_1,C_2 是反对称矩阵.

令 $H=C_1-C_2=B_2-B_1$，则 $H^T=B_2^T-B_1^T=B_2-B_1=H$，

$$H^T=(C_1-C_2)^T=-C_1+C_2=-(C_1-C_2)=-H,$$

故 H 为对称矩阵，又为反对称矩阵，由(1)的结果可知，$H=O$，故 $C_1=C_2$，$B_1=B_2$，因而表法唯一.

(3)$A=(A+A^T)/2+(A-A^T)/2$，

$$A+A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&0&6&5\\0&0&4&1\\6&4&-4&4\\5&1&4&10\end{bmatrix},$$

$$A-A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&-2&2&-1\\2&0&2&-3\\-2&-2&0&2\\1&3&-2&0\end{bmatrix},$$

故 $$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4&0&6&5\\0&0&4&1\\6&4&-4&4\\5&1&4&10\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-2&2&-1\\2&0&2&-3\\-2&-2&0&2\\1&3&-2&0\end{bmatrix}.$$

习　　题　2.10

1. 设 A,B 为对称矩阵，试证 $AB+BA$ 为对称矩阵，$AB-BA$ 为反对称矩阵.

2. A 为对称矩阵，则 A^* 也为对称矩阵.

3. [2.10]　设 A,B 都是 n 阶对称阵，证明 AB 是对称阵的充分必要条件是 $AB=BA$.

4. 若 A 为反对称矩阵，且 $|A|\neq 0$，证明 A^{-1} 仍为反对称矩阵.

5. 设 A 是反对称阵，B 是对称阵，证明 AB 是反对称矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

6. 设 $|A|\neq 0$，若 A^* 是反对称，则 A^{-1} 也是.

7. A 为 m 阶反对称矩阵，P 为任意 m 阶矩阵，则 $P^{\mathrm{T}}AP$ 为反对称矩阵.

8. 试将下列矩阵 A 表成对称矩阵与反对称矩阵之和，并证明这表示唯一：

$$A=\begin{bmatrix}2&-3&31&-23\\-1&2&-19&14\\0&0&3&-2\\0&0&-4&3\end{bmatrix}.$$

9. 若 A 为对称阵，则 A^* 也为对称阵.

§2.11 元素没有具体给出的矩阵行列式算法

法一 应用行列式性质计算

当矩阵用行向量或列向量的形式给出时，可用行列式性质计算其行列式.

例 1[1988 年 1,2] 设 4 阶矩阵 $A=[\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，$B=[\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4]$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，试求行列式 $|A+B|$ 的值.

解 先求出两矩阵 A 与 B 之和. 要注意，两矩阵相加是各列分别相加，于是得到

$$\begin{aligned}A+B&=[\alpha+\beta,\gamma_2+\gamma_2,\gamma_3+\gamma_3,\gamma_4+\gamma_4]\\&=[\alpha+\beta,2\gamma_2,2\gamma_3,2\gamma_4].\end{aligned}$$

因行列式中只要有某一列有公因式，就可提取公因式，而 $|A+B|$ 中有公因式的列共有 3 列，故可提取 3 个公因式 2，得到

$$|A+B|=2^3|\alpha+\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|.$$

又因行列式中只要有一列为两分列之和，就可拆分为两行列式之和，故

$$\begin{aligned}|A+B|&=8|\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|+8|\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4|\\&=8(|A|+|B|)=8(4+1)=40.\end{aligned}$$

注意 $|A+B|\neq|A|+|B|$. 事实上，上例 $|A+B|=40$，而 $|A|+|B|=5$.

例 2[1993 年 5][选择题] 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是四维列向量，且四阶行列式

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m,\ |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n.$$

则四阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|$ 等于______.

(A) $m+n$ (B) $-(m+n)$ (C) $n-m$ (D) $m-n$

解 先将行列式拆分为两个行列式之和，得到

$$|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|=|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1|+|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_2|.$$

再利用两列一调，行列式变号的性质，得到

$$\begin{aligned}|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,(\beta_1+\beta_2)|&=-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|-|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_2|\\&=-m+|\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n-m.\end{aligned}$$

因而(C)对，其余的都不对.

例3 设3阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\3\gamma_3\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{bmatrix}$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3$ 均是3维行向量，且已知行列式 $|A|=18$，$|B|=2$，求 $|A-B|$.

解 两矩阵相减，其对应行分别相减，因而

$$|A-B|=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\2\gamma_2-\gamma_2\\3\gamma_3-\gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_2\\2\gamma_3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}\alpha-\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}.$$

上行列式的第1行为两分行之差，因而可拆分为两行列式之差，得到

$$\begin{aligned}|A-B|&=2\begin{vmatrix}\alpha\\\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{vmatrix}\alpha\\2\gamma_2\\3\gamma_3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}\beta\\\gamma_2\\\gamma_3\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\times18-2\times2=2.\end{aligned}$$

注意 上例中 $|A|-|B|=18-2=16$，而 $|A-B|=2$，故 $|A-B|\neq|A|-|B|$. 一般也有 $|A-B|\neq|A|-|B|$.

法二 利用计算行列式的公式计算

计算行列式的公式除常用的 $|A^{\mathrm{T}}|=|A|$，$|A^{-1}|=1/|A|$ 外，还应注意下面两个公式的应用：

$|kA|=k^n|A|$（k 为常数，n 为 A 的阶数）[详见(2.1.2)式]

$|A^*|=|A|^{n-1}$（n 为 A 的阶数）[详见(2.5.1)式]

例 4 设 A 是三阶方阵，$|A|=1/2$，求 $|(3A)^{-1}-2A^*|$.

解法一 利用 $A^*=|A|A^{-1}=(1/2)A^{-1}$，化成 A^{-1} 的行列式计算之：

$$\begin{aligned}|(3A)^{-1}-2A^*|&=|(1/3)A^{-1}-2|A|A^{-1}|\\&=|(1/3)A^{-1}-A^{-1}|=|(-2/3)A^{-1}|\\&=(-2/3)^3|A^{-1}| \quad [\text{利用}(2.1.2)\text{式}]\\&=(-8/27)|A|^{-1}=(-8/27)(1/2)^{-1}\\&=-16/27.\end{aligned}$$

解法二 利用 $A^{-1}=|A|^{-1}A^*=2A^*$，化成 A^* 的行列式计算之：

$$\begin{aligned}|(3A)^{-1}-2A^*|&=|(1/3)2A^*-2A^*|=|(-4/3)A^*|\\&=(-4/3)^3|A^*| \quad [\text{利用}(2.1.2)\text{式}]\\&=(-4/3)^3\cdot|A|^{3-1} \quad [\text{利用}(2.5.1)\text{式}]\\&=-17/27.\end{aligned}$$

解法三 利用 $AA^*=|A|E$，消掉原行列式中的 A^*，为此将原行列式乘以 $|3A|$ 或 $|A|$，以产生矩阵 AA^*. 因

$$\begin{aligned}|3A||(1/3)A^{-1}-2A^*|&=|(1/3)\cdot 3A\cdot A^{-1}-3\cdot 2\cdot AA^*|\\&=|E-6AA^*|=|E-6|A|E|\\&=|E-3E|=|-2E|\\&=(-2)^3|E|=-8,\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}|(1/3)A^{-1}-2A^*|&=|3A||(1/3)A^{-1}-2A^*|/|3A|\\&=-8/(3^3\cdot|A|)=-16/27.\end{aligned}$$

或因 $$\begin{aligned}|A||(3A)^{-1}-2A^*|&=|(1/3)AA^{-1}-2AA^*|\\&=|(1/3)E-2|A|E|\\&=|(1/3)E-E|=|(-2/3)E|\\&=-8/27,\end{aligned}$$

故 $$\begin{aligned}|(3A)^{-1}-2A^*|&=|A||(3A)^{-1}-2A^*|/|A|\\&=(-8/27|A|)=-16/27.\end{aligned}$$

例 5[1987 年 1，2][选择题] 设 A 为 n 阶方程，且 A 的行列

式$|A|=a\neq0$,而A^*为A的伴随矩阵,则$|A^*|$等于______.

(A) a　　(B) $1/a$　　(C) a^{n-1}　　(D) a^n

解法一　显然由(2.5.1)式知$|A^*|=|A|^{n-1}$即得$|A^*|=a^{n-1}$. (C)入选.

解法二　由$AA^*=|A|E$,得$|AA^*|=|A|^n$, $|A||A^*|=|A|^n$. 因$|A|\neq0$,故$|A|^*=|A|^{n-1}=a^{n-1}$.

解法三　$A^*=|A||A|^{-1}$,故

$|A^*|=||A|A^{-1}|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^n/|A|=|A|^{n-1}=a^{n-1}$.

法三　乘积矩阵AB的行列式用下述公式求之:

$$|AB|=|A||B| \tag{2.11.1}$$

例6[1991年5][选择题]　设A,B为n阶方阵,满足等式$AB=O$,则必有______.

(A) $A=OB=O$　　(B) $A+B=O$

(C) $|A|=0$或$|B|=0$　　(D) $|A|+|B|=0$

解　由$|AB|=|A||B|=0$,即得$|A|=0$或$|B|=0$. (C)对.

例7　设$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{bmatrix}$,计算$|AA^T|$.

解　A为三阶范德蒙行列式,故$|A|=(b-a)(c-a)(c-b)$,因而　$|AA^T|=|A||A^T|=|A|^2=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2$.

常用(2.11.1)式直接计算乘积矩阵的行列式(如上例),但也用来计算和、差矩阵的行列式,特别是常用它计算(或证明)含正交矩阵的和、差矩阵的行列式(等式).为将和、差矩阵化成乘积矩阵,常将单位矩阵E(如果式中不显含单位矩阵E可在适当地方乘进)恒等变形为AA^T或A^TA(A为正交矩阵),然后提取公因式,利用下列转置矩阵的行列式性质:

$$\begin{cases}|\lambda E-A^T|=|(\lambda E)^T-A^T|=|(\lambda E-A)^T|=|\lambda E-A|\\ |A^T-\lambda E|=|A^T-(\lambda E)^T|=|(A-\lambda E)^T|=|A-\lambda E|\end{cases} \tag{2.11.2}$$

及正交矩阵A的行列式性质$|A|^2=1$计算和推导.

例 8[1995 年 1,2]　设 A 是 n 阶矩阵,满足 $AA^{\mathrm{T}}=E$, $|A|<0$,求 $|A+E|$.

解　将所求行列式 $|A+E|$ 中的 E 用 AA^{T} 代换,得到

$$|A+E|=|A+AA^{\mathrm{T}}|=|A(E+A^{\mathrm{T}})|=|A||E+A^{\mathrm{T}}|.$$

因 $|E+A^{\mathrm{T}}|=|E^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}|=|(E+A)^{\mathrm{T}}|=|E+A|$,故

$$|A+E|=|A||E+A| \text{即} (|A|-1)|A+E|=0.$$

又因 $AA^{\mathrm{T}}=E$,故 $|AA^{\mathrm{T}}|=1$,即 $|A|^2=1$,所以 $|A|=\pm 1$,而 $|A|<0$,故 $|A|=-1$. 从而

$$(|A|+1)|A+E|=(-2)|A+E|=0, \text{即} |A+E|=0.$$

例 9　假定 A,B 为正交矩阵,即 $AA^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A=E$, $BB^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}B=E$,且 $|A|=-|B|$,证明 $|A+B|=0$.

证　
$$\begin{aligned}|A+B|&=|A\cdot E+E\cdot B|=|A\cdot B^{\mathrm{T}}B+AA^{\mathrm{T}}B|\\&|A(B^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}})B|=|A||B^{\mathrm{T}}+A^{\mathrm{T}}||B|\\&=|A||B||(A+B)^{\mathrm{T}}|=-|B|^2|A+B|\end{aligned}$$

即 $(1+|B|^2)|A+B|=0$. 因 $1+|B|^2\neq 0$,故 $|A+B|=0$.

法四　对角化法

如果 n 阶矩阵 A 能与对角阵相似,又已知其 n 个特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,为求行列式 $|A+kE|$,可先将 A 对角化,即存在可逆阵 P,使 $A=P\Lambda P^{-1}$,其中 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,再将 $E=PP^{-1}$ 代入得到

$$\begin{aligned}|A+kE|&=|P\Lambda P^{-1}+kPP^{-1}|=|P\Lambda P^{-1}+PkEP^{-1}|\\&=|P||\Lambda+kE||P|^{-1}=|\Lambda+kE|\\&=|\mathrm{diag}(\lambda_1+k,\lambda_2+k,\cdots,\lambda_n+k)|.\end{aligned}$$

将实对称矩阵(正定矩阵)对角化,计算其行列式的方法,参看 §6.3.

例 10　[1994 年 2]设 A 为 n 阶方阵,$2,4,\cdots,2n$ 为其 n 个特征值,试计算 $|A-3E|$.

解　因 A 有 n 个不同的特征值,故可对角化,即存在可逆阵 P,使 $A=P\mathrm{diag}(2,4,\cdots,2n)P^{-1}$. 因 $E=PP^{-1}$,则

$$|A-3E|=|P\mathrm{diag}(2,3,\cdots,2n)P^{-1}-P(3E)P^{-1}|$$

$$=|P||\mathrm{diag}(2-3,4-3,6-3,\cdots,2n-3)||P^{-1}|$$
$$=(-1)[1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)]$$
$$=-(2n-3)!!.$$

法五　特征值法

利用矩阵的特征值计算矩阵的行列式，参看 §5.2.

习　　题　2.11

1. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=-2$. 将 A 按列分块，其三个列向量分别为 A_1,A_2,A_3，即 $A=[A_1,A_2,A_3]$，求 $|A_3-2A_1,3A_2,A_1|$.

2. 设 A 为 3 阶矩阵，$|A|=-2$，将 A 按行分块，其三个行向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，即 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}$，求行列式 $\begin{bmatrix}\alpha_3-2\alpha_1\\ 3\alpha_2\\ \alpha_1\end{bmatrix}$.

3. 设 A 为三阶矩阵，且 $|A|=2$，求 $|4A^{-1}+A^*|$.

4. 设 A 为 n 阶方阵，k 为常数，若 $|A|=a$，求 $|kA^{T}A|$.

5. [1989 年 4][选择题]　设 A 和 B 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有______.

(A) $|A+B|=|A|+|B|$　　　　(B) $AB=BA$

(C) $|AB|=|BA|$　　　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$

6. 设 A 为 n 阶正交阵，证明当 $|A|=1$，且 n 为奇数时，$|E-A|=0$.

§2.12　矩阵的秩的求法

求一个元素已知特别是数字型矩阵的秩常用的方法有初等变换法，计算子式法，综合法及求极大无关组等方法. 下面分别举例介绍.

法一　初等变换法

因矩阵经初等变换后，其秩不变，故可用初等变换求其秩. 用这种方法求矩阵的秩，不需要计算行列式.

用初等变换求矩阵的秩，既可以用初等行变换，也可以用初等列变换，也可以交替进行，把 A 化为一个容易求秩甚至一看就知道其秩的矩阵．一般化为行阶梯形．若阶梯形矩阵中有 r 个非零行，则原矩阵的秩就是 r．这种方法使用方便，是求秩最常用的方法．

例 1[3.5(1)]　设 $A=\begin{bmatrix}3&1&0&2\\1&-1&2&-1\\1&3&-4&4\end{bmatrix}$，求秩 A．

解　用初等变换法求之．

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&3&-4&4\\1&-1&2&-1\\3&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{bmatrix}1&3&-4&4\\0&-4&6&-5\\0&-8&12&-10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+(-2)r_2}\begin{bmatrix}1&3&-4&4\\0&-4&6&-5\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1,$$

A_1 已是行阶梯形，它有两个非零行，故秩 $A=$ 秩 $A_1=2$．

例 2　讨论 λ 取值的范围，确定下列矩阵的秩：

$$A=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{bmatrix}.$$

解　用初等变换将 A 化成阶梯形矩阵：

$$A\xrightarrow[r_3+(-1)r_1]{r_2+(-2)r_1}\begin{bmatrix}1&\lambda&-1&2\\0&-1-2\lambda&\lambda+2&1\\0&10-\lambda&-5&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_4\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&\lambda\\0&1&\lambda+2&-1-2\lambda\\0&-1&-5&10-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & \lambda\\0 & 1 & \lambda+2 & -1-2\lambda\\0 & 0 & \lambda-3 & 9-3\lambda\end{bmatrix}$$

故当 $\lambda\neq3$ 时，秩 $A=3$；$\lambda=3$ 时，秩 $A=2$.

法二　计算子式法

根据矩阵 A 的秩的定义，要求 A 的秩，只需求出 A 的不等于零的子式的最高阶数即可. 常由低阶到高阶计算不为零的子式的最高阶数.

设矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，A 中如有一个 r 阶子式 D_r 不等于零，但所有包含 D_r 的 $r+1$ 阶子式（如果有的话）（称为 D_r 的加边子式）都等于零，则 A 的秩等于 D_r 的阶数，即秩 $A=r$；若有 D_r 的某一个加边子式 $\triangle_{r+1}$ 不为零，则需考察 $\triangle_{r+1}$ 的加边子式，…. 由于 m,n 都是有限整数，故总可以算出 A 的某一个子式 D 不等于零，而它的所有加边子式全为零（当然，D 也可能没有加边子式，例如，如 A 为一方阵，且 $|A|=|a_{ij}|\neq0$）.

例 3　求下列矩阵 A 的秩：

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1 & -3 & -2\\2 & -1 & 3 & 1 & -3\\7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{bmatrix}.$$

解　从低阶子式算起，不难看出 A 中有不为零的 2 阶子式，例如 A 中左上角（虽然不一定非取左上角，但是取左上角的子式对往下计算是很方便的）的 2 阶子式 $D_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}=-7\neq0$，由此可断言，$A$ 的秩不小于 2，但并没有求出 A 的秩，为此需计算 D_2 的所有加边子式. D_2 共有三个加边子式：

$$\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\2 & -1 & 3\\7 & 0 & 5\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & +2 & -3\\2 & -1 & 1\\7 & 0 & -1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}3 & 2 & -2\\2 & -1 & -3\\7 & 0 & -8\end{vmatrix}.$$

不难计算，上述三个加边子式全为零，因而秩 $A=2$.

例 4　确定 x 与 y 的值，使下列矩阵 A 的秩为 2：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\3&2&1&-3&x\\0&1&2&6&3\\5&4&3&-1&y\end{bmatrix}.$$

解法一 显然 A 中有 2 阶子式不等于零，故秩 $A\geqslant 2$，为使秩 $A=2$，必须使 A 的任何一个三阶子式均为零，特别应使下列含 x 与 y 的三阶行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-3&x\\2&6&3\end{vmatrix}=-4x,\quad\begin{vmatrix}1&1&1\\2&6&3\\3&-1&y\end{vmatrix}=4y-8$$

为零. 由此解出 $x=0, y=2$.

解法二 $$A\xrightarrow[i=2,3,4,5]{c_i+(-1)c_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\3&-1&-2&-6&x-3\\0&1&2&6&3\\5&-1&-2&-6&y-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-5)r_1]{r_2+(-3)r_1}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&-2&-6&x-3\\0&1&2&6&3\\0&-1&-2&-6&y-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&6&3\\0&-1&-2&-6&x-3\\0&-1&-2&-6&y-5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+1\cdot r_2]{r_3+1\cdot r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&2&6&3\\0&0&0&0&x\\0&0&0&0&y-2\end{bmatrix}=A_1.$$

为使 A_1 是含两个非零行的行阶梯形，必有 $x=0, y-2=0$ 即 $y=2$.

为求矩阵的秩，也可由高阶到低阶计算子式.

例 5 求下列矩阵的秩：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & a_5^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & a_5^3 \\ (a_1+1)^3 & (a_2+1)^3 & (a_3+1)^3 & (a_4+1)^3 & (a_5+1)^3 \end{bmatrix}$$

其中 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j(i,j=1,2,3,4,5)$.

解 矩阵 A 是一个 5 阶方阵，因其第 5 行是第 1,2,3,4 行的线性组合，故 $|A|=0$，即 5 阶子式等于零. 再看 A 中是否有 4 阶子式不为零. 因为 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j(i,j=1,2,3,4)$，故 4 阶范德蒙行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

因而 A 中不等于零的子式的最高阶数为 4，故秩 $A=4$. 解毕

矩阵中含参数，又没给出确定矩阵的秩的参数取值条件和范围，显然参数取不同值时，将会改变矩阵的秩，因此需对参数的取值进行讨论.

例 6 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$ 的秩.

解 直接从高阶到低阶计算子式：

$$|A|\xlongequal[i=2,3,4]{c_1+c_i}\begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix}=(a+3b)\cdot\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+3b)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & a-b & 0 & 0\\1 & 0 & a-b & 0\\1 & 0 & 0 & a-b\end{vmatrix}.$$

(1)$a+3b\neq 0$，且 $a-b\neq 0$ 时，因 $|A|\neq 0$，故秩 $A=4$；

(2)$a+3b\neq 0$ 时，且 $a-b=0$ 时，显然秩 $A=1$；

当 $a+3b=0$ 时，$|A|=\begin{vmatrix}0 & b & b & b\\0 & a & b & b\\0 & b & a & b\\0 & b & b & a\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3,4]{r_1+r_i}\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & a & b & b\\0 & b & a & b\\0 & b & b & a\end{vmatrix}$

令 $D_3=\begin{vmatrix}a & b & b\\b & a & b\\b & b & a\end{vmatrix}$. 由(1)可知，当 $a+2b\neq 0$，且 $a-b\neq 0$ 时，有 $D_3\neq 0$，从而秩 $A=3$，但由 $a+3b=0$，$a+2b\neq 0$ 必有 $a\neq b$. 事实上，如 $a=b$，由 $a+3b=4b=0$ 得到 $b=0$，从而 $a=b=0$，于是 $a+2b=0$ 与 $a+2b\neq 0$ 矛盾，故得

(3)$a+3b=0$ 且 $a+2b\neq 0$ 时，有秩 $A=3$.

法三　综合法

这里的综合法就是综合使用初等变换与计算子式的方法，即先对矩阵 A 施行初等变换，把矩阵 A 化为比较简单的形式 A_1(不必为阶梯形)，然后用计算子式的方法求出 A_1 的秩.

例 7　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -4 & 3 & -3 & 5\\1 & -2 & 1 & 5 & 3\\1 & -2 & 4 & -34 & 0\end{bmatrix}$ 的秩.

解　先用初等行变换将 A 化成较简单的形式 A_1：

$$A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -34 & 0\\1 & -2 & 1 & 5 & 3\\2 & -4 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+(-2)r_1]{r_2+(-1)r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & 4 & -34 & 0\\0 & 0 & -3 & 39 & 3\\0 & 0 & -5 & 65 & 5\end{bmatrix}=A_1.$$

因 A_1 中有二阶子式 $\begin{vmatrix}1 & 4\\0 & -3\end{vmatrix}\neq0$，而 A_1 的第 2,3 行成比例，故 A_1 的所有三阶子式都等于零，故秩 $A_1=2$，所以秩 $A=$ 秩 $A_1=2$.

法四 求极大无关组法

因矩阵的秩就是它的行(或列)向量组的秩，故求矩阵的秩可转化为求行(或列)向量组的极大无关组所含向量的个数.

例 8 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}6 & -1 & 5 & 7 & 4\\1 & 5 & 6 & -4 & 11\\2 & 3 & 5 & -1 & 8\\-4 & 6 & 2 & -10 & 8\end{bmatrix}$ 的秩.

解 设 A 中 5 个列向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$. 因 α_1,α_2 的对应分量不成比例，它们线性无关，且

$$\alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+2\alpha_2,$$

故 A 的列向量组的一个极大无关组为 α_1,α_2，所以秩 $A=2$.

习 题 2.12

1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 2\\2 & 2 & 2 & 4 & 4\\2 & 2 & 4 & 2 & 4\\2 & 4 & 2 & 2 & 6\\4 & 2 & 2 & 2 & 6\end{bmatrix}$ 的秩.

2. 已知矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 1 & -6 & 10\\2 & 5 & k & -1\\1 & 2 & -1 & k\end{bmatrix}$ 的秩为 2，求 k 的值.

3. a,b,c 满足什么条件时，矩阵 A 的秩为 3：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\a & 0 & c\\b & 0 & 1/2\end{bmatrix}.$$

4. 讨论 λ 取值范围，确定下列矩阵的秩：

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$ 的秩.

§2.13 矩阵的秩的等式证法

证法一 利用非零矩阵的秩等于矩阵中不等于零的子式的最高阶数的定义证明.

例 1[3.2] 在秩为 r 的矩阵 A 中，有没有等于零的 $r-1$ 阶子式？所有 $r-1$ 阶子式是否都等于零？有没有等于零的 r 阶子式？有没有不等于零的 $r+1$ 阶子式？

解 秩 $A=1$，由上述定义可知，A 中至少有一 r 阶子式不等于零，且同时 A 中所有 $r+1$ 阶子式都等于零. A 中可能有等于零的 r 阶子式，$r-1$ 阶子式，但不可能所有 $r-1$ 阶子式都等于零，否则按某一行(或列)展开必得到 A 的所有 r 阶子式等于零，这与秩 $A=r$ 的假定不符. 例如，

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩等于 2，至少有一个 2 阶子式 $\Delta_2^{(1)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$，且所有 3 阶子式(只有一个即 $|A|$)都等于零. 但 A 中也有 $r-1=1$ 阶子式等于零，$r=2$ 阶子式 $\Delta_2^{(2)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

例 2 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}(n\geqslant 2)$，试证

$$
\text{秩 } A^* = \begin{cases} n, \text{当秩 } A=n \text{ 时}; \\ 0, \text{当秩 } A<n-1 \text{ 时}; \\ 1, \text{当秩 } A=n-1 \text{ 时}. \end{cases} \qquad (2.13.1)
$$

证 (i)当秩 $A=n$ 时,$|A|\neq 0$,由 $AA^*=|A|E$,得到

$$\text{秩 } A^* = \text{秩}(AA^*) = \text{秩}(|A|E) = n.$$

(ii)当秩 $A<n-1$ 时,由上述矩阵秩的定义知,A 中所有 $n-1$ 阶子式全为零,即 A^* 中所有元素为零,亦即 $A^*=O$,故秩$(A^*)=0$.

(iii)当秩 $A=n-1$ 时,由定义知 A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式不等于零,故 $A^*\neq O$,从而秩$(A^*)\geqslant 1$;另一方面,因秩 $A=n-1$,故 A 中所有 n 阶子式(只有一个即 $|A|$)都等于零,从而 $|A|=0$,所以 $AA^*=|A|E=O$,于是秩 $A+$秩$(A^*)\leqslant n$(详见下节例 5),而秩 $A=n-1$,故秩$(A^*)\leqslant 1$,所以秩$(A^*)=1$.

例 3 试证 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$的秩为 0 或为 1 的充要条件是存在 mn 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$,使

$$a_{ij}=a_ib_j \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

证 (1)秩 $A=0$ 的充要条件是 A 为零矩阵,显然 $a_{ij}=0$,所求的 mn 个数可全部选为零.

(2)秩 $A=1$ 的充要条件

$\leftrightarrow$所有 2 阶子式都等于零,但至少有一个一阶子式不等于零.

$\leftrightarrow$任意两行(或列)线性相关,但其中至少有一非零行(或列)向量.

不妨设$[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}]\neq\mathbf{0}$,则对任意 $i(2\leqslant i\leqslant n)$有

$$[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]=k_i[a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}](i=2,3,\cdots,n).$$

令 $k_i=a_i,a_{1j}=b_j$,则有

$$a_{ij}=k_ia_{1j}=a_ib_j(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n).$$

证法二 证两矩阵等价

根据两矩阵等价必等秩,两等价矩阵的秩必相等.

例 4 设 A 和 B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是秩 $A=$秩 B.

证 先证必要性．证明一 因 $A\sim B$，且 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵(同型矩阵)，故其标准形相同．设其标准形为 I，则 $A\sim I,B\sim I$，根据两矩阵等价必等秩，则有秩 $A=$秩 I，秩 $B=$秩 I. 从而秩 $A=$秩 B.

必要性证明二 因 $A\sim B$，且 A,B 为 $m\times n$ 矩阵，故存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆阵 Q，使 $PAQ=B$. 由 §2.8 例 8，即命题 2.13.2 知秩 $A\geqslant$秩 B. 同理由 $A=P^{-1}BQ^{-1}$得到秩 $A\leqslant$秩 B，故必有秩 $A=$秩 B.

再证充分性．因秩 $A=$秩 B，且 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵(同型矩阵)，故其标准形相同. 设其标准形为 I，则有 $A\sim I,B\sim I$，根据等价关系的对称性，得到 $A\sim I,I\sim B$，由传递性得到 $A\sim B$. 证毕

当两矩阵中一矩阵的行(列)向量为另一矩阵的行(列)向量的线性组合，或一矩阵中一子块的行(列)向量为另一子块的行(列)向量的线性组合时，可用初等变换证其等价，则其秩必等．

例 5 设 A,B 为可相乘矩阵，试证

$$秩[AB,A]=秩 A.$$

证 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，$B=[b_{ij}]_{n\times t}$，则

$$AB=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1t}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nt}\end{bmatrix}$$

$$=\Big[\sum_{k=1}^{n}b_{k1}\alpha_k,\sum_{k=1}^{n}b_{k2}\alpha_k,\cdots,\sum_{k=1}^{n}b_{kt}\alpha_k\Big],$$

即 AB 的所有列向量都是 A 的列向量的线性组合. 对矩阵$[AB,A]$施行如下初等列变换：

将 A 的第 1 列乘以$-b_{11}$，第 2 列乘以$-b_{21}$，…，第 n 列乘以$-b_{n1}$都加到 AB 的第 1 列，于是 AB 的第 1 列消成零；…；将 A 的第 1 列乘以$-b_{1t}$，第 2 列乘以$-b_{2t}$，…，第 n 列乘以$-b_{nt}$都加到 AB 的

第 t 列($t=2,3,\cdots,n$),则 AB 的其他各列也消成零,于是得到

$$[AB,A]\to[O,A],$$

因而 $$秩[AB,A]=秩[O,A]=秩 A.$$

法三 用双边夹的方法证之

用双边夹的方法证明矩阵秩的等式时,常用下述命题建立单向不等式(一边夹):

命题 2.13.1 设 A 为 $m\times p$ 矩阵,B 为 $p\times n$ 矩阵,若 $AB=O$,则

$$秩 A+秩 B\leqslant p \quad [见(2.14.4)式].$$

命题 2.13.2 秩$(AB)\leqslant\min$(秩 A,秩 B)(见 §2.8 例 8).

命题 2.13.3 设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$,则秩 $A\leqslant\min(m,n)$.

例 6[4.22] 设 A 为 n 阶矩阵,且 $A^2=A$,若秩 $A=r$,证明秩$(A-E)=n-r$,其中 E 为 n 阶单位阵.

证 因 $A^2=A$,$A(A-E)=O$,由命题 2.13.1 知秩$(A)+$秩$(A-E)\leqslant n$. 又 $E=E-A+A$,故由下节例 4 得到

$$\begin{aligned}n=秩(E)=秩(E-A+A)&\leqslant 秩(E-A)+秩 A\\&=秩(A-E)+秩 A,\end{aligned}$$

所以秩$(A-E)+$秩 $A=n$. 由题设秩 $A=r$,故秩$(A-E)=n-r$.

例 7[4.12] 设向量组 $A:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能由向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示为

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_r\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix} \tag{2.13.2}$$

其中 K 为 $r\times s$ 矩阵,且 A 组与 B 组均线性无关,证明秩 $K=r$.

证 因 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关,故秩 $B=r$. 又因 $B=KA$,由命题 2.13.2 知秩 $K\geqslant$秩 $B=r$. 而 K 为 $r\times s$ 矩阵,由命题 2.13.3 知,秩 $K\leqslant r$,故秩 $K=r$.

例 8[1993 年 1,2] 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,$P$ 为 3 阶非零矩阵

且满足 $PQ=O$，则

(A)$t=6$ 时 P 的秩必为 1.　　(B)$t=6$ 时 P 的秩必为 2.

(C)$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 1.　　(D)$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

解法一　$P\neq O$，故秩 $P\geqslant 1$，又由命题 2.13.1 知秩 P＋秩 $Q\leqslant 3$，而当 $t\neq 6$ 时，秩 $Q=2$，故秩 $P\leqslant 3-$秩 $Q=1$，所以秩 $P=1$. (C)入选.

解法二　设 P 的 3 个行向量为 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$，它们均为 $X^{\mathrm{T}}Q=\mathbf{0}$ 的解向量. 因 $t\neq 6$ 时，秩 $Q=2$，故其基础解系只含一个解向量，而 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$ 中至少有一不为零向量，故秩 $P=1$. (C)入选.

法四　利用齐次线性方程组系数矩阵的秩与解向量的维数及基础解系所含解向量个数之间的关系证之.

例 9　设 A 与 B 是 n 阶矩阵，证明秩$(AB)=$秩 B 的充要条件是方程组 $AB\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$(1)与 $B\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$(2)同解.

证　必要性　设秩$(AB)=$秩 B，则方程组(1)与(2)的基础解系所含解向量个数相同；又因(2)的解必是(1)的解，故(2)的基础解系也是(1)的基础解系，从而两方程组有相同的基础解系，于是其解完全相同.

充分性　如两方程组(1)与(2)同解，则必有相同的基础解系. 设它们解向量的个数为 s，则秩$(AB)=n-s=$秩 B. 证毕

由上例结论可得：

法五　欲证乘积矩阵的秩等于其因子矩阵的秩，只须证明分别以乘积矩阵，因子矩阵为系数矩阵的两方程组同解.

例 10　矩阵 A、B、C 可相乘，且对任意 C，由 $ABC=O$ 可推出 $BC=O$，试证秩$(AB)=$秩 B.

证　由题设可知 $AB\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$(1)的解为 $B\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$(2)的解；又显然(2)的解必为(1)的解，故(1)与(2)同解，因而

$$\text{秩}(AB)=\text{秩}\ B.$$

例 11　设 A 为 $n\times m$ 实矩阵，证明

$$\text{秩}\ A=\text{秩}(A^{\mathrm{T}}A)=\text{秩}(AA^{\mathrm{T}}).\qquad(2.13.3)$$

证 因 A 为 $A^{T}A$ 的因子矩阵，为证秩 A = 秩($A^{T}A$)，只须证 $AX=\mathbf{0}$(1)与 $A^{T}AX=\mathbf{0}$(2)同解，显然(1)的解为(2)的解，下证(2)的解也是(1)的解. 事实上，由 $A^{T}AX=\mathbf{0}$ 得到

$$X^{T}A^{T}AX=(AX)^{T}(AX)=\mathbf{0}.$$

A 为实矩阵，故 AX 为实列向量，因而由上式得到 $AX=\mathbf{0}$. 对 A^{T}，仿上可证秩(A^{T}) = 秩(AA^{T}). 由秩(A) = 秩(A^{T})，例得证.

注意 假如 A 不是实矩阵，上例不一定成立，例如 $A=[i,1]$ 时，$AA^{T}=O$，显然有秩 $A=1\neq 0=$ 秩(AA^{T}).

法六 利用下列矩阵秩的等式求(证)之

命题 2.13.4 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆阵，Q 为 n 阶可逆阵，则

秩(PAQ) = 秩(AQ) = 秩(PA) = 秩 A[见§2.15 例 4].

命题 2.13.5 设 A 为实矩阵，则

秩 A = 秩($A^{T}A$) = 秩(AA^{T})[见(2.13.3)式].

命题 2.13.6 设 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶方阵，则

$$\text{秩}\ A^{*}=\begin{cases} n, & \text{若秩}\ A=n, \\ 1, & \text{若秩}\ A=n-1, \quad [\text{见}(2.13.1)\text{式}] \\ 0, & \text{若秩}\ A<n-1. \end{cases}$$

例 12[1994 年 4][选择题] 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆阵，秩 $A=r$，矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1，则_____.

(A) $r>r_1$　　　　(B) $r<r_1$

(C) $r=r_1$　　　　(D) r_1 与 r 的关系依 C 而定

解 因 C 为可逆阵，由命题 2.13.4 可知，

$$r_1=\text{秩}\ B=\text{秩}(AC)=\text{秩}\ A=r.$$

例 13[1996 年 1,2] 设 A 为 4×3 矩阵，且秩 $A=2$，而 $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，求秩($AB$).

解 因 $|B|=10\neq 0$，故 B 为可逆阵，由命题 2.13.4 得到

$$\text{秩}(AB)=\text{秩}\,A=2.$$

例 14[1993 年 4,5] 设 4 阶方阵 A 的秩为 2,求伴随矩阵 A^* 的秩.

解 由命题 2.13.6 可知,当 $n=4$ 时,得到

$$\text{秩}\,A^*=\begin{cases} n=4, & \text{若秩}\,A=n=4,\\ n-(n-1)=1, & \text{若秩}\,A=n-1=4-3=3,\\ 0, & \text{若秩}\,A<n-1=4-1=3. \end{cases}$$

因秩 $A=2<3$,故秩$(A^*)=0$.

例 15 设 $\alpha=[1,2,3]^{\mathrm T}$,$\beta=[1,2,3]$,$A=\alpha\beta$,求秩 A.

解法一 因 $A=\alpha\beta=\alpha\alpha^{\mathrm T}$,由命题 2.13.5 知

$$\text{秩}\,A=\text{秩}(\alpha\beta)=\text{秩}(\alpha\alpha^{\mathrm T})=\text{秩}\,\alpha=1.$$

解法二 因 $A=\alpha\beta\neq O$,故秩 $A\geqslant 1$,又由命题 2.13.2 可知秩 $A\leqslant$秩 $\alpha=1$,故秩 $A=1$.

习 题 2.13

1. 证明(1)秩$[A+B,B]$=秩$[A,B]$;(2)秩$\begin{bmatrix}AB\\B\end{bmatrix}$=秩 B.

2. 证明秩$[\alpha\beta^{\mathrm T}]=1$,其中 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]^{\mathrm T}$,$\beta^{\mathrm T}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$($a_i\neq 0$,$b_i\neq 0$,$i=1,2,\cdots,n$).

3. A 为 n 阶矩阵,$A^2=E$(E 为 n 阶单位矩阵),证明

$$\text{秩}(A+E)+\text{秩}(A-E)=n.$$

4. [1992 年 1,2] 设 $a_i\neq 0$,$b_i\neq 0$($i=1,2,\cdots,n$)求下列矩阵 A 的秩:

$$A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

5. [选择题] 设 n 阶方阵 A,且 $n>2$,若秩 $A=n-1$,则秩(A^*)等于______.

(A) $n-1$　　(B) n　　(C) 0　　(D) 1

6. 设 $A=[a_{ij}]_{p\times p}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$，且秩 $B=p$，如果 $AB=O$，证明秩 $A=0$.

§2.14 矩阵的秩的不等式证法

证法一 证两组行(列)向量一组可由另一组线性表出.

为此常将矩阵作行(或列)分块，且利用下述命题证之：

命题 2.14.1 设向量组(Ⅰ)的秩为 r_1，向量组(Ⅱ)的秩为 r_2，若组(Ⅰ)能由组(Ⅱ)线性表出，则 $r_1\leqslant r_2$.

例 1[3.3] 从矩阵 A 中划去一行得到矩阵 B，问 A,B 的秩的关系怎样？

解法一 设矩阵 A 的行向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$(组Ⅰ)，任意去掉一行 α_i 后得到另一行向量组，即 B 的行向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n(\text{组 Ⅱ})$$

显然组(Ⅱ)可由组(Ⅰ)线性表出，由命题 2.14.1 知

$$\text{秩}(\text{组 Ⅱ})\leqslant\text{秩}(\text{组 Ⅰ})\quad\text{即}\quad\text{秩 } B\leqslant\text{秩 } A.$$

解法二 假如划去的一行向量可由 A 的其余行向量线性表出，则秩 $A=$秩 B；若划去的这个行向量不能由 A 的其余行向量线性表出，那么秩 $B<$秩 A. 综上所述有秩 $B\leqslant$秩 A.

例 2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为同维向量，证明

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s]\leqslant\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t].$$

证 令向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$；

向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$.

因组(Ⅰ)可用组(Ⅱ)线性表出，故例得证.

利用命题 2.14.1 不难得到下述命题：

命题 2.14.2 设向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，其秩为 r_1；

向量组(Ⅱ)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，其秩为 r_2；

向量组(Ⅲ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，其秩为 r_3. 则

$$\left.\begin{array}{l}(1)\text{秩}[\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_s+\beta_s]\leqslant r_1+r_2;\\(2)\text{秩}[\alpha_1-\beta_1,\alpha_2-\beta_2,\cdots,\alpha_s-\beta_s]\leqslant r_1+r_2;\\(3)\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s]\leqslant r_1+r_2;\end{array}\right\}\qquad(2.14.1)$$

可直接利用上述命题证明有关矩阵秩的不等式.

例 3 设方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=d_1\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=d_m\end{cases}\qquad(2.14.2)$$

有解,且其系数矩阵 A 的秩为 r_1,再设方程组

$$\begin{cases}b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=c_1\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ b_{m1}x_1+b_{m2}x_2+\cdots+b_{mn}x_n=c_m\end{cases}\qquad(2.14.3)$$

无解,且其系数矩阵 B 的秩为 r_2,试证明

$$G=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}&d_1&c_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}&d_2&c_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mn}&d_m&c_m\end{bmatrix}$$

的秩不超过 r_1+r_2+1.

证 由假设方程组 2.14.2 有解,则常数列 $[d_1,d_2,\cdots,d_m]^T$ 可写成 A 的列向量组的线性组合,由秩 $A=r_1$,得到秩$(\overline{A})=r_1$,其中 $\overline{A}$ 为方程组(2.14.2)的增广矩阵.

又由假设方程组(2.14.3)无解,则常数列 $[c_1,c_2,\cdots,c_m]^T$ 不能写成 B 的列向量组的线性组合,由秩 $B=r_2$,得到秩$(\overline{B})=r_2+1$,其中 $\overline{B}$ 为方程组(2.14.3)的增广矩阵.

由命题 2.14.2 可知 G 的列向量组的秩不会超过 $\overline{A}$ 的列向量组的秩与 $\overline{B}$ 的列向量组的秩的和,即

$$\text{秩}(G)\leqslant\text{秩}(\overline{A})+\text{秩}(\overline{B})=r_1+r_2+1.$$

例 4[4.11] 证明秩$(A+B)\leqslant$秩$(A)+$秩(B). (2.19.1)

证 设 A,B 是两个 $s\times n$ 矩阵,且设

$$A=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n],B=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n],$$

其中 A_i 与 B_i 分别为 A 与 B 的列向量($i=1,2,\cdots,n$),则

$$A+B=(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n+\boldsymbol{B}_n),$$

于是 $A+B$ 的每个列向量 $\boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是向量组 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n$ 的线性组合,由命题 2.14.1 得

$$\begin{aligned}秩(A+B)&\leqslant 秩[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]\\&\leqslant 秩[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n]+秩[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]\\&=秩 A+秩 B.\end{aligned}$$

证明二 因 $A+B=[A,B]\begin{bmatrix}E_n\\E_n\end{bmatrix}$,由命题 2.13.2 知秩$(A+B)\leqslant$秩$[A,B]$. 而秩$[A,B]=$秩$[\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n,\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_n]$. 由命题 2.14.2 有

$$秩[A,B]\leqslant 秩[\boldsymbol{A}_1,\cdots,\boldsymbol{A}_n]+秩[\boldsymbol{B}_1,\cdots,\boldsymbol{B}_n]=秩 A+秩 B$$

故 $$秩(A+B)\leqslant 秩[A,B]\leqslant 秩 A+秩 B.$$

证法二 利用齐次线性方程组或非齐次线性方组系数矩阵的秩,解向量的维数及基础解系所含解向量个数之间的关系,可证有关矩阵秩的不等式.

为此,对 $AB=O$,常把 B(或 A)的列(或行)向量看成 $AX=\boldsymbol{0}$(或 $X^{\mathrm{T}}B=\boldsymbol{0}$)的解向量.

例 5[4.21] A 为 $m\times p$ 矩阵,B 为 $p\times n$ 矩阵,若 $AB=O$,证明

$$秩 A+秩 B\leqslant p. \tag{2.14.4}$$

证 因 $AB=O$,B 的 n 个列向量都是 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解向量,$\boldsymbol{X}$ 的维数为 p,则 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中恰含($p-$秩 A)个解向量,因而秩 $B\leqslant p-$秩 A,故秩 $A+$秩 $B\leqslant p$. 证毕

由上例可知若 A_1,A_2 均为 n 阶矩阵,且 $A_1A_2=O$,则

$$秩(A_1)+秩(A_2)\leqslant n=1\cdot n.$$

若 A_1,A_2,A_3 均为 n 阶矩阵,且 $A_1A_2A_3=O$,则

$$秩(A_1)+秩(A_2)+秩(A_3)\leqslant 2\cdot n.$$

一般若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 均为 n 阶矩阵，且 $A_1A_2\cdots A_m=O$，则

$$\text{秩}(A_1)+\text{秩}(A_2)+\cdots+\text{秩}(A_m)\leqslant(m-1)n.$$

例 6 设 A,B 为 n 阶矩阵，秩 $A=r<n$，且 $AB=O$，证明

$$\text{秩}\ B\leqslant n-r.$$

证明一 因秩 $A=r<n$，$AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系含 $n-r$ 个解向量，而 B 的所有列向量均为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，故

$$\text{秩}\ B\leqslant n-r.$$

证明二 直接利用上例的结果证之. 因秩 $A+$秩 $B\leqslant n$，而秩 $A=r$，故秩 $B\leqslant n-r$.

例 7 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r，且 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为 0，若矩阵 B 满足

$$AB=\begin{bmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & b_m & \cdots & b_m \end{bmatrix}.$$

证明秩 $B\leqslant n-r+1$.

证 因秩 $A=r$，解向量的维数为 n，故 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解向量中线性无关的最大个数为 $n-r+1$（见 § 4.6 例 6），其中 $\boldsymbol{b}=[b_1,b_2,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$，而 B 的任意列向量都是上方程组的解向量，因而可由它们线性表出，利用命题 2.14.1，得到秩 $B\leqslant n-r+1$.

证法三 其乘积矩阵等于零矩阵的矩阵秩的不等式可利用(2.14.4)式证之

例 8[1994 年 5][选择题] 设 A,B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩______.

(A) 必有一个等于零　　　　(B) 都小于 n

(C) 一个小于 n，一个等于 n　(D) 都等于 n

解 因 $A\neq O,B\neq O$，故秩 $A\geqslant 1$，秩 $B\geqslant 1$. 又因 $AB=O$，故

$$\text{秩}\ A+\text{秩}\ B\leqslant n.$$

由此可知，A 和 B 的秩必须都小于 n，故(B)入选.

证法四 利用矩阵乘积的秩不超过各因子矩阵的秩的结论证之

例 9 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m>n$，证明

$$\text{秩}(AB)<m.$$

证 因 $m>n$，故秩 $A\leqslant n$，秩 $B\leqslant n$，利用乘积的秩不超过因子矩阵的秩，有

$$\text{秩}(AB)\leqslant\min[\text{秩 }A,\text{秩 }B]\leqslant n.$$

由 $m>n$，得到秩$(AB)<m$. 证毕.

例 10[1999 年 1] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则

(A)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.

(B)当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

(C)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.

(D)当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

解 由上例知当 $m>n$ 时，秩$(AB)<m$，必有 $|AB|=0$. 解毕.

为利用上述结论常将矩阵之和(差)化成矩阵之积的形式.

例 11 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，$A=[a_{ij}]_{n\times n}$，若 $f(0)=0$，则秩$[f(A)]\leqslant$秩 A.

证 为证秩$[f(A)]\leqslant$秩 A，只须将 $f(A)$ 改写成 $f(A)=A\cdot g(A)$ 的形式. 事实上，由 $f(0)=0$，得到 $a_0=0$，于是

$$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=x(a_1+a_2x+\cdots+a_mx^{m-1}),$$

故 $f(A)=A(a_1E+a_2A+\cdots+a_mA^{m-1})=Ag(A)$. 证毕

习　　题 2.14

1. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 为同维向量. 证明

$$\text{秩}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t]\leqslant\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t].$$

2. [选择题] 设 A,B 为 n 阶方阵，且秩 $A=$秩 B，则

(A) 秩$(A-B)=0$　　(B) 秩$(A+B)=2$ 秩 A

(C) 秩$(A,B)=2$ 秩 A　　(D) 秩$[A,B]\leqslant$秩 $A+$秩 B

3.[1988年4,5] 若A,B都是n阶非零方阵,且$AB=O$,则A的秩必小于n.这结论是否对?为什么?

4.[选择题] 设A,B为n阶方阵,秩$A=r<n$,且$AB=O$,则秩B为______.

(A) 等于$n-r$　　(B) 不大于$n-r$

(C) 不小于$n-r$　　(D) 不等于$n-r$

§2.15 初等矩阵的作用、性质及其应用

(一)初等矩阵的主要作用

初等矩阵的主要作用是通过它将矩阵的初等变换转化为矩阵的乘法,使矩阵的初等变换在理论证明中得到比较方便而有效的阐述,并得到用初等变换求逆矩阵的方法.可见矩阵的初等变换与矩阵的乘法运算有着十分密切的联系;有了初等矩阵就可以将矩阵的初等变换用矩阵的乘积来表示了.具体表示的方法由下述定理得知:

定理2.15.1 设A为$m\times n$矩阵,对矩阵A施行一次初等行变换相当于在矩阵A的左边乘以一个相应的m阶初等矩阵;对矩阵A施行一次初等列变换相当于在矩阵A的右边乘以一个相应的n阶初等矩阵.

例1[1995年1,2][选择题] 设$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,$B=$

$$\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix},P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则必有

(A) $AP_1P_2=B$.　　(B) $AP_2P_1=B$.

(C) $P_1P_2A=B$.　　　　　　(D) $P_2P_1A=B$.

解　首先分析矩阵 A 经过哪些初等变换，变到矩阵 B，然后找出相应的初等矩阵与 A 相乘：

$$A\xrightarrow{r_3+1\cdot r_1}\widetilde{B}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}B.$$

与上述初等变换相对应的初等矩阵分别为 P_2,P_1. 又因为是初等行变换，应将初等矩阵 P_1P_2 左乘 A，即

$$P_1P_2A=B,$$

故(C)对，其余都不对.

例 2　[选择题]设 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$,

$B=\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}+ka_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+ka_{33}&a_{33}\\a_{11}&a_{12}+ka_{13}&a_{13}\end{bmatrix}$, $P_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$, $P_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{bmatrix}$,

则 A 等于____.

(1) $P_1^{-1}BP_2^{-1}$　　　　　　(2) $P_2^{-1}BP_1^{-1}$

(3) $P_1^{-1}P_2^{-1}B$　　　　　　(4) $BP_1^{-1}P_2^{-1}$

解法一　因被选择的四个矩阵乘积均是逆矩阵与 B 相乘，故可考虑 B 经过哪些初等变换变至矩阵 A. 易看出

$$B\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}a_{21}&a_{22}+ka_{23}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}+ka_{13}&a_{13}\\a_{31}&a_{32}+ka_{33}&a_{33}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}+ka_{13}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}+ka_{23}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}+ka_{33}&a_{33}\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2+(-k)c_3}A.$$

将上述初等变换用矩阵乘积表示为

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix}=A,$$

即
$$\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix}=A.$$

注意到 $P_1^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},$

$$P_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-k&1\end{bmatrix},$$

故 $P_1^{-1}BP_2^{-1}=A$，因而(1)正确，其余都不正确.

解法二 本例可转化为下述四个结论哪个正确：

(1) $P_1AP_2=B$　　(2) $P_2AP_1=B$

(3) $P_1P_2A=B$　　(4) $AP_2P_1=B$

因 $A\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3,r_1\leftrightarrow r_2,c_2+kc_3}B$，故

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&k&1\end{bmatrix}=B,$$

即 $\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{bmatrix}=B$，亦即 $P_1AP_2=B$，(1)正确.

例 3 矩阵 A 和 B 同为 $m\times n$ 矩阵，则 $A\sim B$ 的充分必要条件是存在 m,n 阶可逆阵 P,Q 使 $PAQ=B$.

证 必要性 由于 $A\sim B$，可经过有限次初等行变换和列变换，矩阵 A 化成矩阵 B. 由定理 2.15.1 知，这等价于在矩阵 A 的左右两边分别乘上有限个 m 阶及 n 阶初等矩阵，即

$$P_1P_2\cdots P_rAQ_1Q_2\cdots Q_s=B.$$

因 $P_1,P_2,\cdots,P_r$ 均为 m 阶初等矩阵，故它们均可逆，其乘积也可逆. 令 $P=P_1P_2\cdots P_r$，则 P 为 m 阶可逆阵. 同理令 $Q=Q_1Q_2\cdots Q_s$，则 Q 为 n 阶可逆阵，即有 $PAQ=B$.

充分性　若存在 m 阶可逆矩阵 P 及 n 阶可逆矩阵 Q 使 $PAQ=B$，因 P,Q 均可表示成有限个初等矩阵的乘积，不妨假设 $P=P_1P_2\cdots P_r$，$Q=Q_1Q_2\cdots Q_s$，其中 $P_i(i=1,2,\cdots,r)$，$Q_j(j=1,2,\cdots,s)$ 都是初等矩阵，则有

$$P_1P_2\cdots P_rAQ_1Q_2\cdots Q_s=B,$$

即

$$A\sim B.$$

例 4　设 P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，A 为 $m\times n$ 矩阵，试证秩$(PA)=$秩(A)，秩$(AQ)=$秩(A).

证　因 P 为可逆矩阵，故可表成有限个初等矩阵的乘积，即

$$P=P_1P_2\cdots P_s(P_i\text{ 为初等矩阵}),$$

则

$$PA=P_1P_2\cdots P_sA.$$

因在矩阵 A 的右边乘以一个 m 阶初等矩阵，相当于对矩阵 A 进行一次初等行变换，故 PA 是 A 经过 s 次初等行变换后得到的矩阵，而矩阵经初等变换后其秩不变，故秩$(PA)=$秩 A.

同法可证，秩$(AQ)=$秩 A.

例 5　设 A 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵，证明：矩阵 A 与 B 等价的充分必要条件是秩 $A=$秩 B.

证　必要性证明一　因 $A\sim B$，由本节例 3 可知存在可逆矩阵 $P(m$ 阶$)$，$Q(n$ 阶$)$，使 $PAQ=B$，从而秩$(PAQ)=$秩 B. 又由本节例 4 知，秩$(PAQ)=$秩$(AQ)=$秩 A，故秩 $A=$秩 B.

必要性证明二　因 $A\sim B$，故 A 与 B 有相同的标准形 $I_{m\times n}$. 又矩阵经初等变换后，其秩不变，故

$$\text{秩 }A=\text{秩}(I_{m\times n})=\text{秩 }B.$$

充分性　设秩 $A=$秩 $B=r$，则 A,B 经初等变换均可化为下列标准形

$$I_{m\times n}=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}_{m\times n}=\begin{bmatrix}E_r & O \\ O & O\end{bmatrix}_{m\times n} \qquad (2.15.1)$$

其中 $r\leqslant\min(m,n)$，E_r 为 n 阶单位矩阵

故 $A\sim I_{m\times n}$，$B\sim I_{m\times n}$. 由等价的对称性及传递性得到 $A\sim B$.

例 6 设 A 是秩为 r 的$m\times n$矩阵，证明

(1)存在 m 阶可逆矩阵 P，使 PA 的后 $m-r$ 行全为零；

(2)存在 n 阶可逆矩阵 Q，使 AQ 的后 $n-r$ 列全为零.

证明一 只证(1).(2)留作习题.

因秩 $A=r$，故 A 有 r 个线性无关的行向量，其余 $m-r$ 个行向量都可用它们线性表出. 用初等行变换先将这 r 个线性无关的行向量分别调至第 1,2,…,r 行，记为 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$，即

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}\alpha_{i_1}\\ \alpha_{i_2}\\ \cdots\\ \alpha_{i_m}\end{bmatrix}=A_1$$

这些初等行变换相当于左乘一个初等矩阵 P_1，使

$$P_1A=A_1.$$

因 A_1 中后 $m-r$ 个行均是 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 的线性组合，继续使用初等行变换，可将后 $m-r$ 个行全部化成零，即

$$A_1\sim\begin{bmatrix}\alpha_{i_1}\\ \cdots\\ \alpha_{i_r}\\ \mathbf{0}\\ \cdots\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=A_2.$$

这些初等行变换相当于左乘一个初等矩阵 P_2，使

$$P_2A_1=A_2.$$

于是由 $P_1A=A_1$ 得到 $P_2P_1A=A_2$. 令 $P_2P_1=P$，则可逆矩阵 P，使 PA 的后 $m-r$ 个行全为零.

证明二 设秩 $A=r$，由(2.15.1)式可知存在可逆阵 P,Q 使

$$PAQ=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}.$$

上式两端用 Q^{-1}右乘，并将 Q^{-1}分块为 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\end{pmatrix}$，其中 Q_1 为 r 行子块，则

$$PA=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}E_r & O\\ O & O\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1\\ O\end{pmatrix}.$$

例 7[1997 年 3] [选择题]设 A,B 为同阶可逆矩阵，则____.

(A) $AB=BA$　　(B) 存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

(C) 存在可逆阵 C，使 $C^{\mathrm{T}}AC=B$

(D) 存在可逆阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$

解 因 A,B 为同阶可逆矩阵，故其秩相等，由本节例 5 可知 A 与 B 等价，从而存在可逆阵 P 和 Q 使 $PAQ=B$，因而(D)对.

(二)初等矩阵的性质

首先定义三个初等矩阵的符号.

(Ⅰ)$E_i(k)$表示用 $k(\neq 0)$乘单位矩阵 E 的第 i 行(或第 i 列)所得到的初等矩阵.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，用 k 乘 A 的第 i 行得到的矩阵就等于用 m 阶初等矩阵 $E_i(k)$左乘 A；用 k 乘 A 的第 i 列得到的矩阵就等于用 n 阶矩阵 $E_i(k)$右乘 A.

(Ⅱ)E_{ij}表示互换单位矩阵 E 的第 i 行及第 j 行所得到的初等矩阵.

用 E_{ij} 左(右)乘 A 其结果与互换 A 的第 i 行(列)及第 j 行(列)一致.

(Ⅲ)$E_{ij}(k)$表示用 k 乘单位矩阵 E 的第 i 行加到第 j 行上所得到的矩阵;也表示用 k 乘单位矩阵 E 的第 j 列加到第 i 列上所得到的矩阵.

设 A 为 $m\times n$ 矩阵,用 k 乘 A 的第 i 行加到第 j 行上就等于用 m 阶矩阵 $E_{ij}(k)$左乘 A;用 k 乘 A 的第 i 列加到第 j 列上等于用 n 阶矩阵 $E_{ji}(k)$右乘 A.

下面介绍初等矩阵的主要性质.

由定义得到初等矩阵的转置矩阵的性质:

$$E_i^{\mathrm{T}}(k)=E_i(k);E_{ij}^{\mathrm{T}}=E_{ij};E_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=E_{ji}(k). \tag{2.15.2}$$

初等矩阵是由单位矩阵经过一次初等变换而得到的,显然这些初等矩阵的行列式不等于零,因此初等矩阵都是可逆阵,且由定理 2.15.1 立即得到

(1)$E_{ij}E_{ij}=E$;(2)$E_i(1/k)E_i(k)=E$;(3)$E_{ij}(-k)E_{ij}(k)=E$,

故其逆矩阵分别为

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij}; \tag{2.15.3}$$

$$E_i^{-1}(k)=E_i(1/k); \tag{2.15.4}$$

$$E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k); \tag{2.15.5}$$

因而初等矩阵的逆矩阵仍然是同一类型的初等矩阵.

(三)初等矩阵性质的应用

应熟练掌握初等矩阵的上述性质并能应用它们进行计算.

例 8[2.12(4)] 解矩阵方程

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{bmatrix}.$$

解 X 前后的系数矩阵分别为三阶初等矩阵 E_{12} 与 E_{23},由(2.15.3)式即得,$E_{12}^{-1}=E_{12}$,$E_{23}^{-1}=E_{23}$,故

$$X=E_{12}^{-1}\begin{bmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{bmatrix}E_{23}^{-1}=E_{12}\begin{bmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{bmatrix}E_{23}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-4&3\\2&0&-1\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&-4&3\\1&-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0\\1&3&-4\\1&0&-2\end{bmatrix}.$$

下面介绍可逆矩阵 A 经初等变换后所得矩阵的逆矩阵求法.

例 9 以数 $k\neq0$ 乘 A 的第 i 行(列)所得矩阵记为 $\widetilde{A}_i(k)$，则 $\widetilde{A}_i(k)$ 仍可逆，且 $[\widetilde{A}_i(k)]^{-1}$ 可由 A^{-1} 中第 i 列(行)乘以 $1/k$ 而得到.

证 下只对行变换证明，列变换类似. 因 $\widetilde{A}_i(k)=E_i(k)A$，故

$$\widetilde{A}_i^{-1}(k)=[E_i(k)A]^{-1}=A^{-1}E_i^{-1}(k)=A^{-1}E_i^{-1}(1/k),$$

即 $\widetilde{A}_i^{-1}(k)$ 可由 A^{-1} 中第 i 列乘以 $1/k$ 而得到.

例如 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}$(见 § 2.3 例 1)，

则 $$\widetilde{A}_2^{-1}(4)=[E_2(4)A]^{-1}=A^{-1}E_2(1/4),$$

即 $$\begin{bmatrix}1&0&0\\4&4&0\\1&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/4&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1/4&0\\0&-1/4&1\end{bmatrix}.$$

例 10 以 k 乘 A 的第 i 行(列)加到第 j 行(列)上所得矩阵记为 $\widetilde{A}_{ij}(k)$，则 $\widetilde{A}_{ij}(k)$ 为可逆阵，且 $[\widetilde{A}_{ij}(k)]^{-1}$ 可由 A^{-1} 中第 j 列(行)乘以 $(-k)$ 加到第 i 列(行)上而得到.

证 下只对行变换证明，列变换类似. 因 $\widetilde{A}_{ij}(k)=E_{ij}(k)A$，而

$A,E_{ij}(k)$均为可逆阵，故 $\widetilde{A}_{ij}(k)$为可逆阵，且

$$[\widetilde{A}_{ij}(k)]^{-1}=[E_{ij}(k)]^{-1}=A^{-1}E_{ij}^{-1}(k)=A^{-1}E_{ij}(-k),$$

即$[\widetilde{A}_{ij}(k)]^{-1}$可由 A^{-1}中第 j 列乘以$-k$ 加到第 i 列上得到.

例如 A 与 A^{-1}如上例中所示，则 $\widetilde{A}_{13}(5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\6&1&1\end{bmatrix}$，且

$$\widetilde{A}_{13}^{-1}(-5)=A^{-1}E_{13}(-5)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}E_{13}(-5)$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-5&-1&1\end{bmatrix}.$$

例 11 设 A 为正交矩阵，以 k 乘 A 的第 i 列加到第 j 列上所得方阵记为 $\widetilde{A}_{ij}(k)$，试求 $\widetilde{A}_{ij}^{\mathrm{T}}(k)A$.

解 因 $\widetilde{A}_{ij}(k)=AE_{ji}(k)$，$E_{ji}^{\mathrm{T}}(k)=E_{ij}(k)$，故

$$\widetilde{A}_{ij}^{\mathrm{T}}(k)=[AE_{ji}(k)]^{\mathrm{T}}=[E_{ji}^{\mathrm{T}}(k)A^{\mathrm{T}}=E_{ij}(k)A^{\mathrm{T}},$$

则
$$\widetilde{A}_{ij}^{\mathrm{T}}(k)A=E_{ij}(k)A^{\mathrm{T}}A=E_{ij}(k).$$

例 12[1997 年 1] 设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(1)证明 B 可逆； (2)求 AB^{-1}.

解 (1)因 A 可逆，故$|A|\neq0$. 又因$|B|=-|A|$，故$|B|\neq0$，因而 B 为可逆矩阵.

(2)因 $B=E_{ij}A$，由(2.15.3)式知 $E_{ij}^{-1}=E_{ij}$，故得到

$$AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=EE_{ij}=E_{ij}.$$

习　　题 2.15

1.[选择题] 当 $A=($　　$)$时，

$$A\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}-3a_{31} & a_{12}-3a_{32} & a_{13}-3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. 设 Q 为 n 阶可逆阵，A 为 $m\times n$ 矩阵，利用初等矩阵证明秩$(AQ)=$秩 A.

3. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，证明存在 n 阶可逆阵 Q，使 AQ 的后 $n-r$ 列全为零.

4. 对换 A 中第 i,j 两行(列)所得方阵记为 $\widetilde{A}_{ij}$，则 $\widetilde{A}_{ij}$可逆，且 $\widetilde{A}_{ij}^{-1}$可由 A^{-1}对换第 i,j 两列(行)而得到.

第三章　向量组的线性相关性

§3.1　如何正确理解线性相(无)关的定义

线性相关、线性无关的定义极为重要．如何正确理解呢？让我们从线性相关的定义谈起．

定义 3.1.1　对于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 1)$，如果有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}, \tag{3.1.1}$$

则称向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

对于上述定义，要注意以下几点：

第一，一组使(3.1.1)式成立的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是对向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 来说的，因而向量组确定后这些不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是一组特定的常数．当向量组不同时，即使所含向量个数一样，使(3.1.1)式成立的不全为零的各组数一般来说是不同的．

例 1[选择题]　当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关时，使等式

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

成立的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 是____．

(A)任意一组常数

(B)任意一组不全为零的常数

(C)某些特定的不全为零的常数

(D)唯一的一组不全为零的常数

解　由线性相关的定义知(C)入选．

例 2[4.3(4)]　假如 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线

性相关，则有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=\mathbf{0},\sum_{j=1}^{m}k_j\beta_j=\mathbf{0},\text{因而}\sum_{s=1}^{m}k_s(\alpha_s+\beta_s)=\mathbf{0},$$

故 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 线性相关．这种证法正确否？

解 这种证法不一定正确．由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，存在一组不全为零的数 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，使

$$t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_m\alpha_m=\mathbf{0}, \tag{3.1.2}$$

这是正确的．但是这里的 $t_1,t_2,\cdots,t_m$ 是对向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 来说的，仅与该向量组有关，也就是说，使(3.1.2)式成立的这组不全为零的数 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，不一定能使 $t_1\beta_1+t_2\beta_2+\cdots+t_m\beta_m=\mathbf{0}$ 同时成立．同样由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关，也存在一组不全为零的数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 使

$$s_1\beta_1+s_2\beta_2+\cdots+s_m\beta_m=\mathbf{0}, \tag{3.1.3}$$

而这一组数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 也仅与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 有关，不一定使 $s_1\alpha_1+\cdots+s_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 同时成立．因而虽然使(3.1.2)与(3.1.3)式分别成立的不全是零的数组可能有很多，但不一定能找到一组公共的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$\sum_{i=1}^{m}k_i\alpha_i=\mathbf{0},\qquad \sum_{j=1}^{m}k_j\beta_j=\mathbf{0} \tag{3.1.4}$$

同时成立，如能找到，上述证法正确；找不到就不正确．

例如，对向量组 $\alpha_1=[1,0,1],\alpha_2=[2,0,2]$ 与 $\beta=[0,3,0],\beta_1=[0,1,0]$来说就找不到公共的不全为零的一组数 k_1,k_2，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=\mathbf{0}$ 和 $k_1\beta_1+k_2\beta_2=\mathbf{0}$ 同时成立．当然也就找不到不全为零的数 k_1,k_2，使 $k_1(\alpha_1+\beta_1)+k_2(\alpha_2+\beta_2)=\mathbf{0}$ 成立．事实上，$\alpha_1+\beta_1=[1,3,1],\alpha_2+\beta_2=[2,1,2]$是线性无关的．

如果 $\alpha_1=[1,0,1],\alpha_2=[2,0,2],\beta_1=[0,1,0],\beta_2=[0,2,0]$，则可找到一组公共的不全为零的 k_1,k_2 使(3.1.4)式中两式同时成立．事实上，

$$(-2)\alpha_1+\alpha_2=\mathbf{0},(-2)\beta_1+\beta_2=\mathbf{0},$$

因而 $$(-2)(\alpha_1+\beta_1)+1(\alpha_2+\beta_2)=\mathbf{0},$$
故 $\alpha_1+\beta_1=[1,1,1]$，$\alpha_2+\beta_2=[2,2,2]$线性相关．解毕

例 3[4.3(2)] 若有不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 使
$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=\mathbf{0}$$
成立，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 亦线性相关．这结论是否正确？

解法一 因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 不全为零，又由题设有
$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)=\mathbf{0},$$
所以 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 线性相关，但不能由此推得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 分别线性相关．因为对这两向量组，下式不一定成立：
$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_m\alpha_m=\mathbf{0},\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_m\beta_m=\mathbf{0}.$$

如取 $\alpha_1=[1,0,0,0]$，$\alpha_2=[0,1,0,0]$，$\beta_1=[-1,0,0,0]$，$\beta_2=[0,-1,0,0]$，则对任意一组不全为 0 的数 λ_1,λ_2，总有
$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)=\mathbf{0},$$
因而 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性相关，但 α_1,α_2 与 β_1,β_2 却分别线性无关，因而
$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2\neq 0,\qquad \lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2\neq 0.$$
如取 $\alpha_1=[1,0,0,0]$，$\alpha_2=[-1,0,0,0]$，$\beta_1=[0,1,0,0]$，$\beta_2=[0,-1,0,0]$，则当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，有
$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)=\mathbf{0},$$
因而 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2$ 线性相关，且 α_1,α_2 与 β_1,β_2 线性相关，因这时也有
$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2=\mathbf{0},\qquad \lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\mathbf{0}.$$

解法二 由题设能断定向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关，但其部分向量组不一定线性相关，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都不一定分别线性相关．例如取 $\alpha_1=[1,0]$，$\alpha_2=[0,1]$，$\beta_1=[-1,0]$，$\beta_2=[0,-1]$．当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，有 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\mathbf{0}$，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 线性相关，但其部分向量组 α_1，

α_2；β_1,β_2 却分别线性无关．

由例 2 及上例可知，一般说来，有

$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性相关和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性相关推不出 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 必线性相关．反之由 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,+\alpha_m+\beta_m$ 线性相关，也推不出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 分别线性相关．

例 4[1996 年 4,5][选择题]　设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$. 若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=\mathbf{0},$$

则　(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性相关．

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性无关．

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关．

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关．

解　由题设得到

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+k_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m-\beta_m)=\mathbf{0}.$$

而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m,k_1,\cdots,k_m$ 是不全为零的数，故 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关．因而(D)入选．

第二，应注意(3.1.1)式中的一组数 $k_1,\cdots,k_m(m\geqslant 2)$ 不全为零的含义就是其中至少有一个，不妨说，k_i 不为零．于是至少有一个向量 α_i 可以由其余向量线性表出，因此，也可以说：

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 中至少有一个向量(注意不要求所有向量)能表成其余向量的线性组合，那么该向量组线性相关．

例 5　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一零向量.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量的分量成比例

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中有一个向量是其余向量的线性组合

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意一个向量是其余向量的线性组合

解　(A)、(B)是向量组线性相关的充分条件，但不是必要条件，(D)既不是充分条件，也不是必要条件．只有(C)入选．

第三，应注意满足(3.1.1)式的一组数 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为零，因而至少有一个不为零，但到底是哪一个(哪几个)数不为零，不另加条件，仅由线性相关的定义无法确定的．因而不能随便说某一个向量是其余向量的线性组合，更不能说其中每个向量都是其余向量的线性组合．

例 6[4.3(1)]　若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 α_1 是其余向量的线性组合，这说法对吗？

解　不对。例如 $\alpha_1=[1,0,0]$，$\alpha_2=[0,1,0]$，$\alpha_3=[0,2,0]$线性相关，但 α_1 不能写成其余向量 α_2,α_3 的线性组合．

例 7　下述论断是否正确：如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，那么其中每个向量都是其余向量的线性组合．

解　论断不正确．按线性相关的定义只要求其中至少有一向量能表为其余向量的线性组合，并不要求向量组中每个向量都能表示其余向量的线性组合．否则，线性相关的定义变成存在一组全不为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，这显然是不正确的．

事实上，线性相关的向量组中有些向量就不能表成其余向量的线性组合(见上例)．解毕

第四，应注意使(3.1.1)式成立的不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，如果存在，可能仅一组，也可能有无穷多组，但线性相关的定义只要求能找出某一组．由此可知，如一向量能由其余向量线性表出，这种表出一般不是唯一的．

例 8　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 总有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，这命题是否正确？

解　不正确．因由定义，只要存在一组不全为 0 的数 $s_1,s_2,\cdots,s_m$ 使 $s_1\alpha_1+\cdots+s_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 就行了．

例 9　假定 α 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 表示为 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，问向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 是否线性相关？

解　因可找一组不全为 0 的数 $-1,k_1,k_2,\cdots,k_m$，使

$$(-1)\alpha+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$$

成立，故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 线性相关．

例 10［选择题］ 如果向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，则

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使下列等式成立

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m. \tag{3.1.5}$$

(B)存在一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使上等式成立．

(C)唯一地存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使上等式成立．

(D)向量组 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

解 因(3.1.5)式中的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 可能全为零，也可能不全为零，可能唯一也可能不唯一，所以(A)、(B)、(C)都不正确，只有(D)正确．

定义 3.1.2 一个向量组如不线性相关，就称为线性无关．

为了正确理解这一定义，我们联系线性相关的定义，给出它的下列诸等价定义．

(i)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，就是不线性相关，也就是使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 成立的不全为 0 的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 一组也不存在．

这里满足上述条件的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 一组也不存在，其含义表现在下面的等价定义(ii)与(iii)之中．

(ii)对任意一组不全为 0 的数 $k_1,\cdots,k_m$，总有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

(iii)使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 成立的 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 必不是不全为零，因而必是全为零的一组数，从而

只有完全都是零的一组数 $k_1,\cdots,k_m$，方能使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

例 11 若有一组不全为零的数 $k_1,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq\mathbf{0}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．这命题是否正确？

解 由等价定义(ii)知，命题不正确．

例 12 下列论断是否正确？如果对，加以证明，如果错，举出反例.

若 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时，有 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=\mathbf{0}$，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

解 不一定. 由等价定义(iii)可知，只有(不是有!)$a_1=a_2=\cdots=a_n=0$ 时，才有 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=\mathbf{0}$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合只有当组合系数全为零时，才是零向量，除此以外，不再有其它组合系数的线性组合是零向量，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 才线性无关. 由题意不能担保是否还有其他组合系数的线性组合也是零向量，因此不能肯定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. 如果有，则不是；如果没有，就是.

例如，向量组 $\alpha_1=[1,0,0]$，$\alpha_2=[0,1,0]$，$\alpha_3=[1,1,0]$，除了 $a_1=a_2=a_3=0$ 满足 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3=\mathbf{0}$ 外，还有 $a_1=1,a_2=1,a_3=-1$ 这些全不为零的组合系数也满足 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3=\mathbf{0}$，这时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 再如向量组 $\beta_1=[1,0,0]$，$\beta_2=[0,1,0]$，$\beta_3=[0,0,1]$除了 $a_1=a_2=a_3=0$ 以外，没有不全为零的系数 k_1,k_2,k_3 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，因而 β_1,β_2,β_2 线性无关.

例 13 [选择题]设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一组 n 维向量，则下列结论正确的是

(A)如果存在 m 个全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(B)若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 α_m 可由其余向量线性表出.

(C)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是 α_1 不能由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

(D)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 不线性相关，则一定线性无关.

解 (D)入选.

例 14[1988 年 1] n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(3\leqslant s\leqslant n)$线性无关的充要条件是

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s\neq \mathbf{0}$.

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量均线性无关．

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量不能用其余向量线性表出．

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表出．

解 由等价定义(ii)知只有(D)入选．

例 15[4.3(3)] 若只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为零时，等式

$$\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m=\mathbf{0}$$

才能成立，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 也线性无关．这论断正确吗？

解 只有当 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 全为零时，等式

$$\begin{aligned}&\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_m\beta_m\\=&\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)=\mathbf{0}\end{aligned}$$

才成立，只能断定向量组 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 不一定线性无关．例如，$\alpha_1=[1,0]$，$\alpha_2=[-1,0]$，$\beta_1=\beta_2=[0,1]$时，只有当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时

$$\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2=\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)=\mathbf{0}$$

才能成立，因而 $\alpha_1+\beta_1=[1,1]$，$\alpha_2+\beta_2=[-1,1]$线性无关，但 α_1,α_2 及 β_1,β_2 却分别线性相关．解毕．

注意 本例说明 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 线性无关，推不出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 分别线性无关．由习题 3.1 第 3 题还知道，也推不出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关．

当然 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 及 $\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 分别线性无关时，也推不出 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m$ 线性无关．

由(iii)还可得到下述等价定义：

(iv)由 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，只能推出 $k_1=\cdots=k_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

上述等价定义是证明一组向量线性无关常用的方法[见 § 3.5

法四].

我们知道，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$线性相关的充要条件是其中至少有一向量可表成其余向量的线性组合，由此得到线性无关的另一等价定义.

(v)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m\geqslant 2)$中若其中每个向量都不能表成其余向量的线性组合，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

例 16 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则 α_i 可表为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n$ 的线性组合$(1\leqslant i\leqslant n)$. 这论断是否正确？

解 论断不正确，因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，由等价定义(v)可知，其中任一向量都不能表成其余向量的线性组合.

例 17[1991 年 4,5][选择题] 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充要条件是____.

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不为零向量

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余$(s-1)$个向量线性表出

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一部分向量线性无关

解 由线性无关的等价定义(v)可知(C)入选.

例 18 如果向量 β 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，那么向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 是否线性无关？在什么条件下，该向量组线性无关？

解 不一定，因为不能保证 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$都不能分别写成其余向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_t,\beta$ 的线性组合.

例如，向量 $\beta=[1,0,0]$不能由线性相关向量组 $\alpha_1=[0,0,0]$，$\alpha_2=[1,1,1]$线性表出，但 $\alpha_1=0\beta_1+0\alpha_2$ 能写成其余向量的线性组合，由等价定义(v)可知，β,α_1,α_2 不线性无关，即线性相关. 再如向量 $\beta=[1,0,0]$不能由线性无关向量组$\tilde{\alpha}_1=[0,1,0]$，$\alpha_2=[1,1,1]$线性表出，且$\tilde{\alpha}_1,\alpha_2$ 也不能分别由其余向量 α_2,β 与$\tilde{\alpha}_1,\beta$ 线性表

出，由等价定义(v)可知，$\beta,\tilde{\alpha}_1,\alpha_2$ 线性无关．

命题 3.1.1 如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，且 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表出，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta$ 线性无关．

这命题看来似乎显然，其实不然．以 $t=2$ 为例，由 α_1,α_2 线性无关只能得出 α_1,α_2 不能互相线性表出，虽然已知 β 不能由 α_1,α_2 线性表出，但 α_1 不能由 α_2,β；α_2 不能由 β,α_1 线性表出并不很容易看得出来的，因此，需证明．事实上，如果 α_1 能由 α_2,β 线性表出：$\alpha_1=k_2\alpha_2+k\beta$，因 α_1,α_2 线性无关，故 $k\neq0$，即 β 必由 α_1,α_2 线性表出，这与题设矛盾，因而 α_1 不能由 α_2,β 线性表示．同法可证 α_2 不能由 α_1,β 线性表出，故 β,α_1,α_2 线性无关．

命题 3.1.1 的逆否命题经常用，特叙于下：

命题 3.1.2 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且表法唯一．

命题 3.1.3 设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且表法唯一，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

证 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$. 下证 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 由题设，存在一组数 $l_1,l_2,\cdots,l_m$ 使得

$$l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_m\alpha_m=\beta.$$

上两式相加，得到

$$(k_1+l_1)\alpha_1+(k_2+l_2)\alpha_2+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m=\beta.$$

因 β 由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出唯一，故

$$k_1+l_1=l_1,k_2+l_2=l_2,\cdots,k_m+l_m=l_m,$$

所以 $k_1=0,k_2=0,\cdots,k_m=0$.

由上两命题可得

命题 3.1.4 设 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，表法唯一的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

例 19 如果零向量只能用唯一的方式表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．这个论断是否正确？

解 论断正确．零向量表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合的方式

之一是 $\mathbf{0}=0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m$，如果还有另一种方式 $\mathbf{0}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$，那么由表示的唯一性，得到 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，因而只有组合系数全为零时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合才是零向量，由线性无关的等价定义(iii)可知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

例 20[选择题]　n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是____．

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都不是零向量

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中任意两个向量的分量不成比例

(C)向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的向量个数 $m\leqslant n$

(D)某向量 β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且表法唯一

解　显然(A)，(B)都不对．例如 $\alpha_1=[1,2]$，$\alpha_2=[3,4]$，$\alpha_3=[5,6]$，它们都不是零向量，且任意两个向量的分量不成比例，但由命题 3.5.1 可知，它们线性相关．故(A)，(B)不是线性无关的充分条件．显然也不是必要条件．

命题 3.5.1 的逆否命题为：若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，则其个数 m 不超过向量的维数 n 即 $m\leqslant n$. 这是向量组线性无关的必要条件．但不是充分条件．例如 $\beta_1=[1,2,3]$，$\beta_2=[2,4,6]$有 $2=m<n=3$，但 β_1,β_2 线性相关．

由命题 3.1.4 可知只有(D)成立．

习　　题　3.1

1. 下述两种说法是否正确，为什么？

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关的充要条件是存在一向量可以由此向量组线性表出；线性无关的充要条件是每一向量都不能由此向量组线性表出．

2. 假设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是 k 个 n 维向量，如果有 k 个数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_k\alpha_k=\mathbf{0}$，问 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是否线性无关？如果有 k 个不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 使 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k\neq\mathbf{0}$，问 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是否线性相关？是否线性无关？

3. 假如 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 都是 n 维向量，如果 $\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_k\alpha_k+\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_k\beta_k=\mathbf{0}$ 成立，必有 $\lambda_1=\cdots=\lambda_k=0$，问 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 是否线性无关？

4.［1992 年 5］ 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是

(A)若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关．

(B)若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\neq\mathbf{0}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

(C)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$．

(D)若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=\mathbf{0}$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

5. 若 $\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，α 可用它们线性表示，则这个表示式不是唯一的．

§3.2 向量能否表为向量组线性组合的证法

根据是否给出向量分量，采取不同证法．

(一)已知向量

$\alpha=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}},\alpha_i=[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,m)$

可用下列两法证明向量 α 能否表为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合．

方法一 解方程组法．

令 $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m$，将这向量等式改写成分量方程组（未知数 k_i 的个数等于向量个数，方程个数等于向量维数，第 i 个方程的系数为各向量的第 i 个分量），得关于 $k_1,k_1,\cdots,k_m$ 的线性方程组：

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_1+\cdots+a_{1m}k_m=b_1,\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ a_{n1}k_1+a_{n2}k_2+\cdots+a_{nm}k_m=b_n.\end{cases}\tag{3.2.1}$$

1)如果上方程组无解，则 α 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出．

2)如果有解，则 α 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且每个解都是线性表出（组合）系数，因而如果只有唯一解，则线性表出的方式只

有一种，如果有无穷多解，线性表出的方式就有无穷多种．

例 1 已知向量 $\beta=[2,3,-4,1]$，$\alpha_1=[1,-1,2,2]$，

$\alpha_2=[0,3,1,4]$，$\alpha_3=[3,0,7,10]$，$\alpha_4=[1,1,3,5]$，

问 β 能否表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合．

解 设 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，其分量方程组为

$$\begin{cases}k_1+0k_2+3k_2+k_4=2;\\-k_1+3k_2+0k_3+k_4=3;\\2k_1+k_2+7k_3+3k_4=-4;\\2k_1+4k_2+10k_3+5k_4=1.\end{cases}$$

β 能否表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合，归结为上方程组是否有解．解之得

$$k_1=31-3k_3,k_2=21-k_3,k_4=-29,$$

其中 k_3 可任意取值．取 $k_3=0$，得

$$\beta=31\alpha_1+21\alpha_2-29\alpha_4.$$

这说明 β 可以表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合，且有无穷多种线性表出方式．

例 2[1989 年 4,5] 设

$$\alpha_1=[1,1,1],\alpha_2=[1,2,3],\alpha_3=[1,3,t].$$

(1)问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2)问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(3)当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表为 α_1,α_2 的线性组合．

解法一 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$. 由分量方程组(3.2.1)的写法，即得

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\k_1+2k_2+3k_3=0,\text{系数行列式 } D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5.\\k_1+3k_2+tk_3=0;\end{cases}$$

(1)当 $t\neq5$ 时，$D\neq0$ 上方程组只有零解：$k_1=k_2=k_3=0$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

(2)当 $t=5$ 时，$D=0$，上方程组有非零解，即 k_1,k_2,k_3 可取不全为零的值，使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关．

(3)解法一　当 $t=5$ 时，设 $\alpha_3=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2$，解之得到 $x_1=-1,x_2=-2$，于是 $\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$.

(3)解法二　因上方程组的第一个方程与第三个方程之和等于第二个方程的两倍，为简单计，解前两个方程：

$$\begin{cases}k_1+k_2=-k_3,\\ k_1+2k_2=-3k_3,\end{cases}\quad (\text{暂视 } k_3 \text{ 为已知数})$$

用克莱姆法则解之易得到

$$k_1=-k_3,k_2=-2k_3(\text{其中 } k_3 \text{ 为任意实数}).$$

于是上方程组有无穷多组解，特别取 $k_3=1$，得到 $k_1=1,k_2=-2$，于是由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$$

可将 α_3 表为 α_1,α_2 的线性组合：$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$.

解法二　因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为三维向量，故可由行列式 $|[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]|=t-5$ 是否等于零判别 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性相关性．(1)显然当 $t=5$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；(2)当 $t\neq5$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；(3)可用解法一中方法求之．

解法三　用初等行变换解之(详见下面的法二)

$$A=[\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&t-5\end{bmatrix}=A_1$$

(1)当 $t=5$ 时，秩 $A=2,\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}}$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关．

(2)当 $t\neq5$ 时，秩 $A=3,\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}},\alpha_3^{\mathrm{T}}$，即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关．

(3)当$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，即$t=5$时，由$A_1$可知，$\alpha_3=2\alpha_2-\alpha_1$.

方法二　初等行变换法．

为正确应用初等行变换法，先给出下述命题：

命题 3.2.1　设矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$经有限次初等行变换变为矩阵 $A_1=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m]$，则 A 的任意 k 个列向量与 A_1 中对

应的 k 个列向量有相同的线性相关性(初等行变换不改变列向量之间的线性关系),即

1)当且仅当 A_1 的 k 个列向量 $\eta_{i_1},\eta_{i_2},\cdots,\eta_{i_k}$线性无关时,$A$ 中对应的 k 个列向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}$线性无关.

2)当且仅当 A_1 的某个列向量 η_s 可表为某些列向量 $\eta_i,\eta_j,\cdots,\eta_r$ 的线性组合

$$\eta_s=t_i\eta_i+t_j\eta_j+\cdots+t_r\eta_r$$

时,A 中对应列向量 α_s 可表为列向量 $\alpha_i,\alpha_j,\cdots,\alpha_r$ 的线性组合

$$\alpha_s=t_i\alpha_i+t_j\alpha_j+\cdots+t_r\alpha_r.$$

上述命题对行向量有相应结果,读者补充(见命题 3.7.1).

如果 A_1 的秩及其某列向量能写成某些列向量的线性组合一看就知道,那么利用上述命题,A 的秩及其相应列向量能写成某些列向量的线性组合也就知道了.

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r,并记为

$$秩[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]=r.$$

令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha]$. 为方便计,设 A 经初等行变换变成新矩阵

$$A_1=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\beta]$$

$$=\left[\begin{array}{cccc:cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,m} & c_{1,m+1}\\
0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,m} & c_{2,m+1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,m} & c_{r,m+1}\\
\hdashline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{r+1,m+1}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

如 $c_{r+1,m+1}\neq 0$,则

$$秩[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\beta]=r+1\neq r=秩[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m].$$

由命题 3.2.1,秩$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha]\neq$秩$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$,因而 α 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合. 事实上如果 α 能表成 α_1,

$\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 能够互相线性表示，因而这两个向量组等价，于是必等秩，即 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha]=$秩$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$.

如 $c_{r+1,m+1}=0$，则

$$\text{秩}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\beta]=r=\text{秩}[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m],$$

因而 β 可写成 $\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的线性组合，且

$$\beta=c_{1,m+1}\beta_1+c_{2,m+1}\beta_2+\cdots+c_{r,m+1}\beta_r.\text{（详见本节例 7）}$$

由命题 3.2.1 得到

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha]=r=\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m],$$

且
$$\alpha=c_{1,m+1}\alpha_1+c_{2,m+1}\alpha_2+\cdots+c_{r,m+1}\alpha_r.$$

由命题 3.1.2 知道，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，上述表法唯一．

例 3 向量 $\alpha_5=[-2,1,1]^T$ 与 $\alpha_6=[3,-1,3]^T$ 能否表为

$$\alpha_1=[2,-1,1]^T,\alpha_2=[-1,1,1]^T,$$
$$\alpha_3=[-3,2,0]^T,\alpha_4=[-4,3,1]^T$$

的线性组合．

解 证明多个向量能否表为同一向量组的线性组合，用初等行变换可一并证明，比较方便．矩阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \vdots \alpha_5,\alpha_6]$ 经初等行变换变成新矩阵

$$A_1=[\beta_1,\beta_2,\beta_2,\beta_4 \vdots \beta_5,\beta_6]=\left[\begin{array}{cccc:cc}1&0&-1&-1&0&2\\0&1&1&2&1&1\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right].$$

因秩$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4 \vdots \beta_2]\neq$秩$[\beta_1,\beta_3,\beta_3,\beta_4]$，故

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]\neq\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4],$$

因而 α_5 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出．又因

$$\text{秩}[\beta_1,\beta_2,\beta_6,\beta_4,\beta_2]=\text{秩}[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4],\beta_1=2\beta_1+\beta_5,$$

由命题 3.2.1 得到

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6]=\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4],$$

故 α_6 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，且 $\alpha_6=2\alpha_1+\alpha_2$.

由矩阵 A_1 还知道，α_6 的线性表出不唯一．事实上

$$\alpha_6 = 3\alpha_1 + \alpha_3 = 3\alpha_2 - 2\alpha_3$$
$$= 5\alpha_2 - 2\alpha_1 = (5/2)\alpha_1 + (1/2)\alpha_4.$$

例 4[1991 年 4,5] 设有三维列向量 $\alpha_1=[1+\lambda,1,1]^T$, $\alpha_2=[1,1+\lambda,1]^T,\alpha_3=[1,1,1+\lambda]^T,\beta=[0,\lambda,\lambda^2]^T$, 问 λ 取何值时

(1)β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,且表达式唯一?

(2)β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示,且表达式不唯一?

(3)β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

解法一 用初等行变换解之:

$$A=\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2\\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & \lambda(1+\lambda)^2\end{bmatrix}=A_1.$$

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时,

$$A_1\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \lambda(2\lambda^2+7\lambda+4)/(\lambda+3)\\ 0 & 1 & 0 & 2(1-\lambda-\lambda^2)/(\lambda+3)\\ 0 & 0 & 1 & -(1+\lambda^2)/(\lambda+3)\end{bmatrix},$$

故当 $\lambda\neq0$,且 $\lambda\neq-3$ 时,β 可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合,且

$$\beta=\frac{\lambda(2\lambda^2+7\lambda+4)}{\lambda+3}\alpha_1+\frac{2(1-\lambda-\lambda^2)}{\lambda+3}\alpha_2-\frac{1+\lambda^2}{\lambda+3}\alpha_3;$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,故 β 的上述表法唯一.

(2)当 $\lambda=0$ 时,$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 显然有

$$\beta=0\alpha_1,\text{或 }\beta=0\alpha_2,\text{或 }\beta=0\alpha_3,$$

表法不唯一.

(3)当 $\lambda=-3$ 时,$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2 & 9\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -30\end{bmatrix}$. 因

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=2\neq\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]=3,$$

故 β 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．

解法二 用解方程组的方法求之．设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$，则

$$\begin{bmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ \lambda\\ \lambda^2\end{bmatrix}\quad \text{即 } AX=b.$$

因 $|A|=\lambda^2(\lambda+3)$，故

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程组有唯一解，β 可唯一地表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合；

(2)当 $\lambda=0$ 时，易看出秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=1<3=n$，故原方程组有无穷多组解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，但表法不唯一；

(3)当 $\lambda=-3$ 时，秩 $A=2<$ 秩 $\overline{A}=3$，原方程组无解，故 β 不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．

因方程组(3.2.1)是否有解，可用初等行变换解决，于是得到向量能否表为向量组线性组合的综合解法．

方法三 综合解法．

即用初等行变换解方程组(3.2.1)的方法．

例 5[1991 年 1,2] 已知 $\alpha_1=[1,0,2,3]$，$\alpha_2=[1,1,3,5]$，$\alpha_3=[1,-1,a+2,1]$，$\alpha_4=[1,2,4,a+8]$及 $\beta=[1,1,b+3,5]$，

(1)a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合；

(2)a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 唯一的线性表示式；并写出该表示式．

解 设 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，由分量方程组(3.2.1)的写法，即得

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ \qquad x_2-x_3+2x_4=1,\\ 2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3,\\ 3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5.\end{cases}$$

β能否表成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合的问题归结为上方程组是否有解的问题．因经初等行变换得到：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&a+2&4&b+3\\3&5&1&a+8&5\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&a+1&0&b\\0&0&0&a+1&0\end{pmatrix}=\overline{A}_1$$

(1)$a=-1$但$b\neq0$时，由于秩$A=2\neq$秩$\overline{A}=3$上方程组无解，故β不能表成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合；

(2)当$a\neq-1$时，秩$A=$秩$\overline{A}=4=n$，故原方程组有唯一解，

且因 $$\overline{A}_1\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2b/(a+1)\\0&1&0&0&(a+b+1)/(a+1)\\0&0&1&0&b/(a+1)\\0&0&0&1&0\end{pmatrix},$$

故β可唯一地表示成

$$\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\alpha_4.$$

(二)对没有给出分量的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$可用下述各法证明$\beta$能否表为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合．

(1)为证β可表为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合，可证线性表示式$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta=0$中$k\neq0$；或利用命题3.1.2的结论证之．

(2)为证β不能表为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合，可证上式中$k=0$(见§3.3例1和例5)，或证$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性无关，或证

$$\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta]\neq\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m].$$

例6[1999年3]　设β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，但不能由向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示，记向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则

(A)α_m不能由(Ⅰ)线性表示，也不能由(Ⅱ)线性表示．

(B)α_m不能由(Ⅰ)线性表示，但可由(Ⅱ)线性表示．

(C)α_m 可由(Ⅰ)线性表示,也可由(Ⅱ)线性表示.

(D)α_m 可由(Ⅰ)线性表示,但不可由(Ⅱ)线性表示.

解 因β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出,故可设

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

为证α_m可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$线性表出,只须证明上式中$k_m\neq0$.用反证法证之,如$k_m=0$,则$\beta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}$,则$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表出,这与题设矛盾,故$k_m\neq0$,从而

$$\alpha_m=(1/k_m)\beta-(k_1/k_m)\alpha_1-\cdots-(k_{m-1}/k_m)\alpha_{m-1},$$

即α_m可由向量组(Ⅱ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$线性表出.

下面再证α_m不能由向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示.事实上如果$\alpha_m$能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表示,由上式即知,$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$线性表出,这与题设矛盾,故只有(B)入选.

例 7 若两向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$有相同的秩,证明$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出.

证 因$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$不一定线性无关,故不能直接利用命题3.1.2.为此,取它的最大无关组,设法证明最大无关组加上β线性相关,于是就可利用命题3.1.2.

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\cdots,\alpha_m$的秩为$r$,且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为其一个最大无关组.因向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$的秩也为$r$,故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也为该向量组的一个最大无关组,所以$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出.

例 8 设齐次线性方程组$AX=0$的系数矩阵A为$m\times n$矩阵,其秩为r,X为n维列向量,证其任意$n-r$个线性无关的解向量都是它的一个基础解系.

解 设$n-r$个线性无关的解向量为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$,又$\beta$为其任一解.由基础解系的定义及题设,只需证$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表出.

若β包含在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$中,显然$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表出;若$\beta$不包含在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$中,因基础解系仅含$n-r$个解

向量，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$ 线性相关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关，由命题 3.1.2 知 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性表出.

习　　题　3.2

1. 设 $\beta_1=(\lambda,1,1]^T,\beta_2=[1,\lambda,1]^T,\beta_3=[1,1,\lambda]^T,\alpha=[1,\lambda,\lambda^2]^T$，问 λ 分别取何值时，α 能与不能表成 β_1,β_2,β_3 的线性组合？

2. 设 $\alpha_1=[1+\lambda,1,1],\alpha_2=[1,1+\lambda,1],\alpha_3=[1,1,1+\lambda],\beta=[1,\lambda,\lambda^2]$，试问 λ 取何值时，β 可唯一地由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？

3. 设 $\alpha_1=[1,2,3],\alpha_2=[3,-1,2],\alpha_3=[2,3,c]$，问

(1)c 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2)c 为何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，并将 α_3 表成 α_1,α_2 的线性组合.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 都是 n 维向量，若 α 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，但能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$ 的线性组合，则 β 也不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，但能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 的线性组合.

5. 确定向量 $\beta_3=[2,a,b]$ 使向量组 $\beta_1=[1,1,0],\beta_2=[1,1,1],\beta_3$ 与向量组 $\alpha_1=[0,1,1],\alpha_2=[1,2,1],\alpha_3=[1,0,-1]$ 的秩相同，且 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

§3.3　线性表出唯一性定理的应用

这里线性表出唯一性定理指的是命题 3.1.2，即下述定理：

定理 3.3.1　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则 β 可唯一地表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合（即 β 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，且表法唯一）.

下面介绍该定理在证题中的几个应用.

应用一　证某向量是某些向量的线性组合

凡在题设中既给出线性无关的向量组，又给出线性相关的向量组，且后者包含前者，后者较前者仅多一个向量，利用上定理，可

推出所多的这个向量是所给线性无关向量组的线性组合(即可用该向量组线性表出).

为满足上定理的条件，常用到下述判定向量组线性相关性的结论：

命题 3.3.1 向量组中有一部分向量组线性相关，则该向量组线性相关，简言之，部分相关，整体相关.

命题 3.3.2 线性无关向量组的任一部分向量组必线性无关，简言之，整体无关，部分也无关.

命题 3.3.3 一向量可由部分向量组线性表出，则该向量可由整个向量组线性表出.

例 1[1992 年 1,2] 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 问

(1)α_1 能否由 α_2,α_3 线性表出? 证明你的结论;

(2)α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出? 证明你的结论.

解 (1)能. 证明一 因 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，由命题 3.3.2 知，α_2,α_3 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，由定理 3.3.1 知 α_1 可唯一地由 α_2,α_3 线性表出.

(1)能. 证明二 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故存在不全为 0 的一组数 k_1,k_2,k_3，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0},$$

则 $k_1\neq 0$，因为如果 $k_1=0$，则 k_2,k_3 不全为零，且有 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=\mathbf{0}$，从而 α_2,α_3 线性相关，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也线性相关，这与已知矛盾，故 $k_1\neq 0$，于是

$$\alpha_1=-(k_2/k_1)\alpha_1-(k_3/k_1)\alpha_3.$$

(2)不能. 证明一 如 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，由(1)知 α_1 又可由 α_2,α_3 线性表出，故 α_4 能由 α_2,α_3 线性表出，这与 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关矛盾.

(2)不能. 证明二 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，又 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，由定理 3.3.1 知，α_1 可唯一地表为

$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合

$$\alpha_1=k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4. \tag{3.3.1}$$

可证 $k_4=0$. 事实上由(1)知 α_1 可唯一地表成 α_2,α_3 的线性组合. 设 $\alpha_1=l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$，代入上式得到

$$(k_2-l_2)\alpha_2+(k_3-l_3)\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}.$$

因 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故有 $k_4=0$，由(3.3.1)式表示的唯一性知 α_4 不能表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

例 2 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，但其中任意三个都线性无关，证明必存一组全不为零的数 k_1,k_2,k_3,k_4 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}.$$

证明一 不妨设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关即得 α_4 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

同法可证 α_3 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性表出；α_2 可用 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出；α_1 可用 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出，因而必有一组全不为零的数 k_1，k_2,k_3,k_4，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}(k_i\neq0).$$

证明二 用反证法证之. 如果 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}$，且有某个 k_i，例如 $k_1=0$，则 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4=\mathbf{0}$. 因 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，故 $k_2=k_3=k_4=0$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 这与题设矛盾，所以 k_1,k_2,k_3,k_4 全不为零.

应用二 证明向量组线性无关

常用反证法利用定理 3.3.1，得出与题设的矛盾.

例 3 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，向量 β_1 可用该向量组线性表出，而向量 β_2 不能用它线性表出. 试证下列 $m+1$ 个向量

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$$

必线性无关.

证 用反证法证之. 如 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$ 线性相关，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关. 由定理 3.3.1 可知，$l\beta_1+\beta_2$ 可由 α_1,α_2，

$\cdots,\alpha_m$ 线性表出．设

$$l\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

又因 β_1 也可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，不妨设

$$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_m\alpha_m,$$

则 $$\beta_2=(k_1-lt_1)\alpha_1+(k_2-lt_2)\alpha_2+\cdots+(k_m-lt_m)\alpha_m,$$

即 β_2 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出，这与题设矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,l\beta_1+\beta_2$ 线性无关．

例 4[1995 年 4]　已知向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；组(Ⅲ)：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$．如果各向量组的秩分别为

$$秩(\text{Ⅰ})=秩(\text{Ⅱ})=3,秩(\text{Ⅲ})=4.$$

证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4．

证明一　因秩(Ⅰ)=3，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；而秩(Ⅱ)=3，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．由定理 3.3.1 可知 α_4 必可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．下用反证法证明例成立．

如果 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性相关，因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故 $\alpha_5-\alpha_4$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．不妨设

$$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3,$$

即 $$\alpha_5=\alpha_4+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3.$$

又因 α_4 也可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出，故 α_5 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出．这与组(Ⅲ)的秩为 4 即与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关矛盾，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 必线性无关．从而其秩为 4．

证明二　为证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4，只须证该向量组线性无关，设有数 k_1,k_2,k_3,k_4 使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=\mathbf{0}.$$

下证 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，由秩(Ⅰ)=秩(Ⅱ)=3 可知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 必线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，由定理 3.3.1 可知，α_4 必可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，设 $\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$ 代入上式即得

$$(k_1-\lambda k_4)\alpha_1+(k_2-\lambda_2k_4)\alpha_2+(k_3-\lambda_3k_4)\alpha_3+k_4\alpha_5=\mathbf{0}.$$

因秩(Ⅲ)=4，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关．从而由上式即得

$$\begin{cases} k_1 \quad\quad\quad\quad -\lambda_1 k_4=0, \\ \quad k_2 \quad\quad\quad -\lambda_2 k_4=0, \\ \quad\quad k_3 \quad -\lambda_3 k_4=0, \\ \quad\quad\quad\quad\quad k_4=0, \end{cases}$$

故 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$. 所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 线性无关.

应用三 证一向量不能用某些向量线性表出.

常用线性表出的唯一性证之. 为此在线性组合的表示式中证明该向量的组合系数等于零.

其例可参看本节例 1(2)的证明二. 下面再举一例.

例 5 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中前 $n-1$ 个向量线性相关,后 $n-1$ 个向量线性无关. 试问

(1)α_1 能否用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出?

(2)α_n 能否用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出?

解 (1)证明一 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n$ 线性相关,而 $\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,由定理 3.3.1 可知 α_1 可用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出.

(1)证明二 因 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,故 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性相关,故 α_1 可用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出.

(2)证明一 因 α_1 能用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出,而 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性无关,故 α_1 能用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 唯一地线性表出,不妨设

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1} \\ &= k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+0\alpha_n. \end{aligned}$$

因 $k_n=0$,故 α_n 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出.

(2)证明二 如果 α_n 能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出,由(1)知 α_1 可用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出,从而 α_n 能用 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出. 这与后 $n-1$ 个向量线性无关矛盾. 因此 α_n 不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 线性表出.

应用四 可得到寻找线性无关向量组的方法．

定理 3.3.1 的逆否命题，即命题 3.1.1 告诉了我们寻找线性无关向量组的方法，即在一组向量中首先选一个非零向量 α_1，再挑选不能用 α_1 线性表出的向量 α_2，则 α_1,α_2 线性无关，再挑选不能用 α_1,α_2 线性表出的向量 α_3，则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，…，如此继续可挑选出一组线性无关的向量．从而得到求极大无关组的逐个删去法(参阅 § 3.7 例 7)．

习　　题　3.3

1.[选择题] 设 β,α_1,α_2 线性相关，β,α_2,α_3 线性无关，则下列结论正确的是______．

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关　　(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

(C)α_1 可用 β,α_2,α_3 线性表出　　(D)β 可用 α_1,α_2 线性表出

2. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关．试证

(1)α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；　　(2)α_1 不能由 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出．

§ 3.4　两向量组等价的证法

设两向量组为　组(Ⅰ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$；　　(3.4.1)

组(Ⅱ)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$．　　(3.4.2)

若 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出，称向量组(Ⅰ)[简称组(Ⅰ)]可由向量组(Ⅱ)[简称组(Ⅱ)]线性表出．当组(Ⅰ)可由组(Ⅱ)线性表出，且组(Ⅱ)可由组(Ⅰ)线性表出时，称组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价，记为组(Ⅰ)$\backsim$(Ⅱ)．

下面介绍两向量组等价的证法．

证法一 根据等价的定义证之．

例 1 向量组与其最大无关组等价．

证 设组（Ⅰ）的秩为 r，且其最大无关组为

$$组（Ⅰ）'：\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\leqslant r\leqslant m). \qquad (3.4.3)$$

由最大无关组的定义知，组（Ⅰ）可由组（Ⅰ）′线性表出，另一方面组（Ⅰ）′为组（Ⅰ）的部分向量组，当然可由组（Ⅰ）线性表出．因而向量组与其最大无关组能互相线性表出，由定义知，必等价．

例 2 两等价的向量组中分别任取一个最大无关组，证明这两个最大无关组等价．

证 设组（Ⅰ）的一个最大无关组为(3.4.3)式所示；组（Ⅱ）的一个最大无关组为

$$组（Ⅱ）'：\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_s}(1\leqslant s\leqslant n). \qquad (3.4.4)$$

下证组（Ⅰ）′∽组（Ⅱ）′．事实上，由上例知组（Ⅰ）∽组（Ⅰ）′，组（Ⅱ）∽组（Ⅱ）′，由题设有组（Ⅰ）∽组（Ⅱ），又由等价的传递性，得到组（Ⅰ）′∽组（Ⅱ）′．

例 3 若向量组 A 与向量组 B 的秩相等，且 A 组能由 B 组线性表示，证明 A 组与 B 组等价．

证 只需证明向量组 B 能由向量组 A 线性表示即可．为此证组 B 的一最大无关组能由组 A 的一最大无关组线性表示．

设向量组 A 与向量组 B 的秩都是 r，且设向量组 A 的一个最大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$；向量组 B 的一个最大无关组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，作向量组 $C:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$，则秩 $C=r$. 事实上因组 A 可由组 B 线性表示，而组 B 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示，故组 A 及其部分向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表示，于是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价，因而必等秩，故秩 $C=r$. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，它也是向量组 C 的一个最大无关组，从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示，即可由组 A 线性表示，而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为组 B 的最大无关组，故组 B 可由组 A 线性表示，所以向量组 A 与向量组 B 等价．

证法二 对于给出分量的两向量组，可利用下述初等变换，根据定义，证明它们等价．

令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$，$B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，

$$C=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]，且设秩 A=k.$$

对 C 进行初等行变换，将 C 化为等价标准形．为方便计，令 A 的前 k 列化为单位矩阵，于是经有限次初等行变换，C 化为

$$C_1=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&*&\cdots&*&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\0&1&\cdots&0&*&\cdots&*&b_{21}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&*&\cdots&*&b_{k1}&\cdots&b_{kn}\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&*&\cdots&*\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&F&\cdots\\0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&*&\cdots&*\\\eta_1&\eta_2&\cdots&\eta_k&\eta_{k+1}&\cdots&\eta_m&\rho_1&\cdots&\rho_n\end{bmatrix}$$

如 C_1 中右下角矩阵 F 为零矩阵，则有

$$\rho_i=b_{1i}\eta_1+b_{2i}\eta_2+\cdots+b_{ki}\eta_k\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

由命题 3.2.1 得到

$$\beta_i=b_{1i}\alpha_1+b_{2i}\alpha_2+\cdots+b_{ki}\alpha_k\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

这说明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 能用向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出．

若 $F\neq O$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中必有某(些)向量不能用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表出．

设秩 $B=t$，重新对 C 施行初等行变换，将 C 化为等价标准形．为方便计，将 B 的前 t 列化为单位矩阵，于是经有限次初等行变换 C 可化为

$$C_2=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\cdots&\alpha_{1m}&1&0&\cdots&0&*&\cdots&*\\\alpha_{21}&\cdots&\alpha_{2m}&0&1&\cdots&0&*&\cdots&*\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_{t1}&\cdots&\alpha_{tm}&0&0&\cdots&1&*&\cdots&*\\*&\cdots&*&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\cdots&G&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\*&\cdots&*&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\gamma_1&\cdots&\gamma_m&\delta_1&\delta_1&\cdots&\delta_t&\delta_{t+1}&\cdots&\delta_n\end{bmatrix}$$

如果 C_2 中左下角矩阵 G 为零矩阵，则

$$\gamma_i=a_{1i}\delta_1+a_{2i}\delta_2+\cdots+a_{ti}\delta_t \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

由命题 3.2.1，有

$$\alpha_i=a_{1i}\beta_1+a_{2i}\beta_2+\cdots+a_{ti}\beta_t \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出，从而它们等价.

例 4 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价，已知

$\alpha_1=[2,3,5],\alpha_2=[0,1,2],\alpha_3=[1,0,0]$,

$\beta_1=[3,1,2],\beta_3=[1,1,1],\beta_3=[1,1,-1],\beta_4=[2,1,0]$.

证 令 $A=[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T],B=[\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_2^T,\beta_4^T],C=[A,B]$. 对 C 施行初等行变换，将 A 化为等价标准形，得到

$$C_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&3&2\\0&1&0&1&-2&-8&-5\\0&0&1&3&-1&-5&-2\\ \eta_1&\eta_2&\eta_3&\rho_1&\rho_2&\rho_3&\rho_4\end{bmatrix}$$

显然有 $\rho_1=\eta_2+3\eta_3,\rho_2=\eta_1-2\eta_2-\eta_3$,

$$\rho_3=3\eta_1-8\eta_2-5\eta_3,\rho_4=2\eta_1-5\eta_2-2\eta_3,$$

由命题 3.2.1 得到

$\beta_1=\alpha_2+3\alpha_3,\qquad \beta_2=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3,$

$\beta_1=3\alpha_1-8\alpha_2-5\alpha_3,\qquad \beta_4=2\alpha_1-5\alpha_2-2\alpha_3.$

重新对 $C=[A,B]$进行初等行变换，将 B 化为等价标准形，得到

$$C_2=\begin{bmatrix}9/2&2&-1/2&1/2&1&0&0\\-1/2&0&-1/2&-3/2&0&1&0\\-1&-1&1&2&0&0&1\\ \gamma_1&\gamma_2&\gamma_3&\delta_1&\delta_2&\delta_3&\delta_4\end{bmatrix}$$

显然有 $\qquad \gamma_1=(9/2)\delta_2-(1/2)\delta_3-\delta_4,$

$$\gamma_2=2\delta_2-\delta_4,\gamma_3=(-1/2)\delta_2-(1/2)\delta_3+\delta_4,$$

由命题 3.2.1 得到

$\alpha_1=(9/2)\beta_1-(1/2)\beta_3-\beta_4,\alpha_2=2\beta_3-\beta_4,$

$\alpha_3=-(1/2)\beta_2-(1/2)\beta_2+\beta_4$,

由等价定义，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价得证．

证法三 对于给出分量的两向量组，可利用下述命题证明．

命题 3.4.1 (1)若 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}A_1=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \cdots\\ \delta_m\end{bmatrix}$，则 A 的行向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 A_1 的行向量组 $\delta_1,\cdots,\delta_m$ 等价．

(2)若 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{经初等}}B_1=[\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m]$，则 B 的列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 与 B_1 的列向量组 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$ 等价．

例 5 证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 α_4,α_5 等价，已知

$\alpha_1=[3,-1,1,0]$，$\alpha_2=[1,0,3,1]$，$\alpha_3=[-2,1,2,1]$，

$\alpha_4=[0,1,8,3]$，$\alpha_5=[-1,1,5,2]$．

证 设以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为行向量的矩阵为 A，以 $\alpha_4,\alpha_5,\mathbf{0}$ 为行向量的矩阵为 B，则

$$A\xrightarrow{r_2+(-1)r_1}A_1\xrightarrow{r_3+(-1)r_2}A_2\xrightarrow{r_2(2)}$$

$$A_3\xrightarrow{r_2+r_1}A_4\xrightarrow{r_1+3r_2}A_5\xrightarrow{r_1(1/2)}B,$$

由命题 3.4.1(1)知，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 α_4,α_5 等价．证毕

注意 仅用初等行(或列)变换将由行(或列)向量组成的两矩阵，一个变为另一个，一般比较困难．因此，常将它们分别化成非零元素 1 的个数相等的等价标准形或化成相同的等价矩阵．

例 6 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_2,\beta_2,\beta_2,\beta_4$ 如本节例 4 所示，试用初等行变换，证明它们等价．

证 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为行向量作矩阵 A，以 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为行向量作矩阵 B，则经有限次初等行变换得到

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\mathbf{0}\end{bmatrix},$$

其中 $\varepsilon_i(i=1,2,3)$为 3 维单位坐标向量，因此，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 等价，而 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 也等价，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 等价.

例 7 证明 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价，已知

$\alpha_1=[2,0,-1,3],\alpha_2=[3,-2,1,-1],$

$\beta_1=[-5,6,-5,9],\beta_2=[4,-4,3,-5].$

证 以 $\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2$ 为行向量分别作矩阵 A 与 B，因

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+(-3)r_1]{r_1(1/2)}A_1\xrightarrow{r_2(1/2)}A_2=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}\beta_3\\\beta_2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+1\cdot r_2}B_1\xrightarrow[r_2+(-4)r_1]{r_1(-1)}B_2$$

$$\xrightarrow[r_2(1/4)]{r_1+(1/2)r_2}B_3=\begin{pmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{pmatrix},$$

其中 $\delta_1=[1,0,-1/2,3/2],\delta_2=[0,1,-5/4,11/9]$. 因 α_1,α_2 与 δ_1,δ_2 等价，β_3,β_1 也与 δ_1,δ_2 等价，由等价的传递性得到 α_1,α_2 与 β_3,β_2 等价.

证法四 用矩阵法证明.

设组(Ⅰ)和组(Ⅱ)分别如(3.4.1),(3.4.2)式所示，令

$$A_1=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\cdots\\\alpha_m\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}\beta_1\\\cdots\\\beta_n\end{bmatrix},$$

或 $$A_2=[\alpha_1,\cdots,\alpha_m],B_2=[\beta_1,\cdots,\beta_n]$$

设组(Ⅰ)能由组(Ⅱ)线性表出，即存在 $m\times n$ 矩阵 X_1，或 $n\times m$ 矩阵 Y_2，使下式成立

$$A_1=X_1B_1,\text{或 }A_2=B_2Y_2;\tag{3.4.5}$$

设组(Ⅱ)能由组(Ⅰ)线性表出，即存在 $n\times m$ 矩阵$\widetilde{X}_1$，或 $m\times n$ 矩阵 $\widetilde{Y}_2$，使下式成立

$$B_1=\widetilde{X}_1A_1\text{，或 }B_2=A_2\widetilde{Y}_2. \tag{3.4.6}$$

于是证明组(Ⅰ)∽(Ⅱ)，可转化证明存在满足(3.4.5)，(3.4.6)两式的矩阵 X_1 与$\widetilde{X}_1$(或 Y_2 与$\widetilde{Y}_2$).

例 8 向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 如本节例 4 所示，试用矩阵法证明它们等价.

证 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_2,\beta_4$ 为行向量分别作矩阵 A_1 与 B_1，先求 3×4 矩阵 $\widetilde{X}_1=[x_{ij}]_{3\times 4}$，使 $A_1=X_1B_1$，即使

$$\begin{bmatrix}2&3&5\\0&1&2\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}&x_{14}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}&x_{24}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}&x_{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&1&2\\1&1&1\\1&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}. \tag{3.4.7}$$

成立. 设 $A_1=[b_{ij}]_{3\times 3}$，由克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases}3x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=b_{i1};\\x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+x_{i4}=b_{i2};\\2x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}+0x_{i4}=b_{i3}\end{cases}\qquad(i=1,2,3)$$

得到

$$\begin{cases}x_{i1}=(b_{i1}-b_{i2}-b_{i4})/2;\\x_{i2}=(5b_{i2}-3b_{i1}+2b_{i3}-7x_{i4})/4;\\x_{i3}=(b_{i1}+b_{i2}-2b_{i3}-3x_{i4})/4\end{cases}\qquad(i=1,2,3)$$

令 $i=1$，取 $x_{14}=0$，将 $b_{i1}=3,b_{i3}=5$ 代入上式得

$$x_{11}=-1/2,x_{12}=19/4,x_{13}=-5/4,x_{14}=0.$$

令 $i=2$，取 $x_{24}=0$，将 $b_{21}=0,b_{22}=1,b_{23}=1$ 代入上式得

$$x_{21}=-1/2,x_{22}=9/4,x_{23}=-3/4,x_{24}=0.$$

令 $i=3$，取 $x_{34}=0$，将 $b_{31}=1,b_{32}=b_{33}=0$ 代入上式得

$$x_{31}=1/2,x_{32}=-3/4,x_{33}=1/4,x_{34}=0.$$

于是求出了满足 $A_1=X_1B_1$ 的 X_1，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可表为 β_1,β_3,β_3，

β_4 的线性组合：

$$\alpha_1=(-1/2)\beta_1+(19/4)\beta_2+(-5/4)\beta_3+0\beta_4,$$

$$\alpha_2=(-1/2)\beta_1+(9/4)\beta_2-(3/4)\beta_3+0\beta_4,$$

$$\alpha_3=(1/2)\beta_1-(3/4)\beta_2+(1/4)\beta_2+0\beta_4.$$

再求满足 $B_1=\widetilde{X}_1A_1$ 的 4×3 矩阵 X_1. 因 A_1 可逆，故

$$\widetilde{X}_1=B_1A_1^{-1}=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&1&1\\1&1&-1\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\2&-5&-4\\-1&3&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&-2&-1\\3&-8&-5\\2&-5&-2\end{bmatrix}.$$

从而 $\beta_1,\beta_3,\beta_3,\beta_4$ 可表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合：

$$\beta_1=0\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3,\quad \beta_2=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3,$$

$$\beta_3=3\alpha_1-8\alpha_2-5\alpha_3,\quad \beta_4=2\alpha_1-5\alpha_2-2\alpha_3,$$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_3,\beta_2,\beta_4$ 等价．

注意 矩阵方程(3.4.7)中未知数个数多于 A_1,B_1 中元素个数时，常用解方程组的方法求出 x_{ij}，如少于 A_1,B_1 中元素个数可用其他方法灵活求出 x_{ij}(详见下例).

例 9 设 $\alpha_1=[1,1,0,0]$，$\alpha_2=[1,0,1,1]$，$\beta_1=[2,-1,3,3]$，$\beta_2=[0,1,-1,-1]$，证明 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价．

证 以 $\alpha_1,\alpha_2;\beta_1,\beta_2$ 为行向量分别作矩阵 A 与 B，要证存在 2 阶方阵 X,Y 使 $A=XB,B=YA$. 设 $X=[x_{ij}]_{2\times2}$，则

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-1&3&3\\0&1&-1&-1\end{bmatrix}.$$

在上等式最右端矩阵中任取一不等于零的 2 阶子式(例如取 2,3 两列所组成的 2 阶子式)，由

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}$$

得到

$$X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&3\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&3\\1&1\end{bmatrix}.$$

这样求出的 X 是否满足

$$\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}=X\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix}$$

呢？经检验满足，因而 X 即为所求．又因 X 为可逆矩阵，取 $Y=X^{-1}$，使 $B=YA$，故 α_1,α_2 与 β_1,β_2 等价．

证法五 利用最大无关组的不唯一性及其等价性证之．

例 10 设组(Ⅰ)，组(Ⅱ)分别为(3.4.1)，(3.4.2)式所示，组(Ⅰ)可由组(Ⅱ)线性表出，且其秩相等，则组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价．

证 作组(Ⅲ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，由题设知组(Ⅲ)与组(Ⅱ)等价，从而必等秩．取组(Ⅰ)与组(Ⅱ)的一个最大无关组分别为组(Ⅰ)′，组(Ⅱ)′，如(3.4.3)，(3.4.4)式所示．由题设知 $r=s$．从而组(Ⅰ)′与组(Ⅱ)′均为组(Ⅲ)的最大无关组，故组(Ⅰ)′与组(Ⅱ)′等价(见本节例 1)．于是组(Ⅱ)可由组(Ⅱ)′，因而可由(Ⅰ)′线性表出，于是组(Ⅱ)可由组(Ⅰ)线性表出．再由题设知组(Ⅰ)与组(Ⅱ)等价．

例 11 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 为本节例 4 中向量，试用本节证法五证明它们等价．

证 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 及 $\beta_2,\beta_2,\beta_2,\beta_4$ 为行向量作矩阵 C，因 C 为 7×3 矩阵，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所组成的矩阵行列不等于 0，故秩$(C)=3$，显然 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个最大无关组，又 β_1,β_2,β_2 所组成的矩阵行列式也不等于零，故 β_1,β_2,β_3 也为 C 的行向量的一个最大无关组，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 β_3,β_2,β_3 等价，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 也等价(因 β_4 可表成 β_1,β_2,β_3 的线性组合)．

习　　题　3.4

1. 设β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性表出，但$\beta$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1}$线性表出试证组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r-1},\alpha_r$与组（Ⅱ）：$\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1},\beta$等价．

2. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_s(s>r)$的秩相等，证明这两个向量组等价．

3. 证明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与$\beta_1,\beta_2,\beta_3$等价，其中

$\alpha_1=[1,2,2,-2],\alpha_2=[-1,3,0,-11],\alpha_3=[2,-1,-2,5]$

$\beta_1=[3,1,0,3],\beta_2=[3,-4,-2,16],\beta_3=[1,7,4,-15]$.

4. 设组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与组（Ⅱ）：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$，已知组（Ⅰ）线性无关，且可经组（Ⅱ）线性表出，试证这两向量组等价．

§3.5　向量组线性无(相)关的证法

法一　观察法

注意利用下述诸命题观察向量组的线性相关性：

命题 3.5.1　当$m>n$时，m个n维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$一定线性相关.

命题 3.5.2　线性无关向量组延长分量后所得向量组仍线性无关；线性相关向量组缩短分量后所得向量组仍线性相关（例 4).

命题 3.5.3　设有两个向量组

$$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r;\qquad B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s.$$

如果组A能由组B线性表出，且$r>s$，则组A线性相关（例 15).

值得注意的是，当$r=s$时，有时也可用观察法找出一组不全为零的常数$k_1,k_2,\cdots,k_r$使$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}$，从而证明组$A$线性相关．

例 1　判断向量组$\alpha_1=[1,0,0,5,6],\alpha_2=[1,2,0,7,8],\alpha_3=[1,2,3,9,10]$的线性相关性．

解 令$\tilde{\alpha}_1=[1,0,0]$，$\tilde{\alpha}_2=[1,2,0]$，$\tilde{\alpha}_3=[1,2,3]$，显然$\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3$线性无关，从而延长分量后所得向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关．

例 2 设$\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\beta_2=\alpha_1+\alpha_2,\beta_3=-\alpha_1+3\alpha_2$．试判断其线性相关性．

解 由命题 3.5.3 知β_1,β_2,β_3线性相关．

例 3 判断下列向量组的线性相关性：

(1)[4.4] $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_4,\beta_4=\alpha_4+\alpha_1$；

(2)$\gamma_1=\alpha_1-\alpha_2,\gamma_2=\alpha_2-\alpha_3,\gamma_3=\alpha_3-\alpha_4,\gamma_4=\alpha_4-\alpha_1$.

解 (1)中两组向量所含向量的个数相等；(2)中也是．但由观察易看出有

$$\beta_3-\beta_2+\beta_3-\beta_4=\mathbf{0},$$
$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4=\mathbf{0},$$

从而向量组$\beta_1,\beta_3,\beta_2,\beta_4$与$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$分别线性相关．解毕

对于给定分量的向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，其中，

$$\alpha_i=[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}]^{\mathrm{T}},\quad (i=1,2,\cdots,m;m\leqslant n)$$

的线性相关性不易观察判断时，可用下述两法即解分量方程组法与求秩法判断其线性相关性．

法二 解分量方程组法．

令$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$，改写成分量方程组：

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{12}k_2+\cdots+a_{1m}k_m=0;\\ a_{21}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{2m}k_m=0;\\ \cdots\\ \alpha_{n1}k_1+\alpha_{n2}k_2+\cdots+\alpha_{nm}k_m=0.\end{cases}\tag{3.5.1}$$

方程组(3.5.1)若只有零解，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，否则线性相关．

例 4 设向量组

$$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})\quad (i=1,2,\cdots,m).\tag{3.5.2}$$

在每一个α_i的相同位置上添加p个分量后，得到$r+p$维向量组

$$\alpha_i{}'=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir},a_{i,r+1},\cdots,a_{i,r+p}). \qquad (3.5.3)$$

(1)若向量组(3.5.2)线性无关,则向量组(3.5.3)线性无关.

(2)若向量组(3.5.3)线性相关,则向量组(3.5.2)线性相关.

证 (1)设 $k_1\alpha_1{}'+k_2\alpha_2{}'+\cdots+k_m\alpha_m{}'=\mathbf{0}$,得分量方程组

$$(3.5.5)\begin{cases}\left.\begin{array}{l}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{m1}k_m=0;\\ \cdots\\ a_{1r}k_1+a_{2r}k_2+\cdots+a_{m,r}k_m=0;\end{array}\right\}(3.5.4)\\ a_{1,r+1}k_1+a_{2,r+1}k_2+\cdots+a_{m,r+1}k_m=0;\\ \cdots\\ a_{1,r+p}k_1+a_{2,r+p}k_2+\cdots+a_{m,r+p}k_m=0.\end{cases}$$

因向量组(3.5.2)线性无关,故方程组(3.5.4)只有零解. 方程组(3.5.4)的解必是(3.5.5)的解,因而方程组(3.5.5)只有零解,向量组(3.5.3)线性无关.

(2)向量组(3.5.3)线性相关,方程组(3.5.5)有非零解,从而方程组(3.5.4)有非零解,故向量组(3.5.2)线性相关.

例 5 设 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是互不相同的数,$r\leqslant n$,证明下列向量组线性无关:

$$\alpha_i=[1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{n-1}] \quad (i=1,2,\cdots,r).$$

证 设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=\mathbf{0}$,得分量方程组:

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0;\\ t_1k_1+t_2k_2+\cdots+t_rk_r=0;\\ \cdots\\ t_1^{n-1}k_1+t_2^{n-1}k_2+\cdots+t_r^{n-1}k_r=0.\end{cases}$$

(i)当 $r=n$ 时,上方程组中未知数个数与方程个数相等,且系数行列式为范德蒙行列式,因 $i\neq j$ 时 $t_i\neq t_j$,故

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ t_1^{n-1} & t^{n-1}2 & \cdots & t_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(t_j-t_i)\neq 0.$$

因而上方程组只有零解，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

(ii)当 $r<n$ 时，令 $\beta_i=[1,t_i,t_i^2,\cdots,t_i^{r-1}]$，$i=1,2,\cdots,r$，由(i)可知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是由线性无关组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 增加相同个数($n-r$ 个)分量所得到的新向量组，由上例知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．

法三　利用矩阵的秩判别

对于已知分量的向量组，其线性相关性，还可用矩阵的秩判别．为此，作矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\quad(\text{或 } A=[\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_m^{\mathrm{T}}]).$$

(Ⅰ)当秩 $A<m$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关；

(Ⅱ)当秩 $A=m$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关．

特别当 $m=n$ 时，可用方阵 A 的行列式判别之：

(Ⅲ)当 $|A|=0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关；

(Ⅳ)当 $|A|\neq0$ 时，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．

例 6　判断下列向量组的线性相关性：

(1)$\alpha_1=[1,3,1,1]$，$\alpha_2=[-1,1,3,1]$，$\alpha_3=[-5,-7,3,-1]$；　(2)$\beta_1=[1,2,3,4]$，$\beta_2=[1,0,1,2]$，$\beta_3=[3,-1,2,0]$．

解　(1)将所给向量排成行向量，作矩阵 A，并对 A 施行初等变换，得到

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 3 & 1\\ -5 & -7 & 3 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 4 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A_1.$$

显然秩 $A_1=2$，故秩 $A=2<3=m$(行向量个数)，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关．

(2)将所给向量 β_1,β_2,β_3 排成列向量，作矩阵 A，并对 A 进行初等变换，得到

$$A=[\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T]=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&0&-1\\3&1&2\\4&2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&3\\0&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=A_1.$$

显然秩 $A_1=3$，故秩 $A=3=m$（列向量个数），β_1,β_2,β_3 线性无关．

即使所给向量没有给出分量，以所给向量为行（或列）向量作矩阵，并对其施行初等行（或列）变换，由变换矩阵的秩小于或等于向量个数也可判定所给向量组线性相关或线性无关．

例 7 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，试证向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关．

证 作矩阵 $A=[\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1]$，则

$$A\xrightarrow[(i=2,3,4)]{c_1+c_i}$$

$$[2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4),\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1]$$

$$\xrightarrow{c_1+(-2)c_2}[2(\alpha_1+\alpha_4),\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1]$$

$$\xrightarrow{c_1+(-2)c_4}[0,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1]=B.$$

显然秩 $B\leqslant3$，从而秩 $A\leqslant3<4$（向量个数）．命题得证．

例 8[1989 年 1,2] 设 A 是 n 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中____．

(A)必有一列元素全为零

(B)必有两列元素对应成比例

(C)必有一列向量是其余列向量的线性组合

(D)任一列向量是其余列向量的线性组合

解法一 因 $|A|=0$，故 A 中 n 个列向量组成的向量组线性相关．由线性相关的充要条件知，其中必有一列向量是其余列向量的线性组合，从而(C)入选．而(A)，(B)分别为列向量组线性相关的充分条件，而不是必要条件，(D)既不是充分也不是必要条件．

解法二 因 $|A|=0$，故 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解．由命题 3.5.4 知

A 的 n 个列向量线性相关，因而(C)入选．

例 9 已知 $abcd\neq 0$，且 $\alpha_1=[a,b,c,d]$，$\alpha_2=[b,-a,d,-c]$，$\alpha_3=[c,-d,-a,b]$，$\alpha_4=[d,c,-b,-a]$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．

证 作矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b & c & d\\ b & -a & d & -c\\ c & -d & -a & b\\ d & c & -b & -a\end{pmatrix}$．由 §1.11 例 5 可知 $|A|\neq 0$，故秩 $A=4$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．

例 10 设有 m 个向量：

$$\alpha_i=[1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}],\quad i=1,2,\cdots,m,$$

且 a_i 是数，试给出它们线性无关的条件，并证明之．

解 作矩阵 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_m & a_m^2 & \cdots & a_m^{n-1}\end{pmatrix}$．显然当 $m\leqslant n$ 时，A 中含 m 阶子式

$$D_m=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{m-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{m-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & a_m & a_m^2 & \cdots & a_m^{m-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1}\end{vmatrix}.$$

此为 m 阶范德蒙行列式．因而当 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 互异时，$D_m\neq 0$，于是秩 $A=m$．由此可知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件为 $m\leqslant n$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 互异．

例 11 n 个 n 维向量 $\beta_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$$(i=1,2,\cdots,n)$线性无关的充要条件是

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

证 令 $A=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$，由 $D\neq 0$，得到 $|A|\neq 0$，故秩 $A=n$（向量个数），从而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关．

反之，当 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 线性无关时，有秩 $A=n$，因而 $|A|\neq 0$，即 $D\neq 0$.

例 12 证明线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0\end{cases}\tag{3.5.6}$$

的解都是

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0,\tag{3.5.7}$$

的解的充要条件是 β 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，其中

$\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$，$\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$　$(i=1,2,\cdots,m)$.

证 充分性见习题 4.3 第 6 题．下证必要性．作方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0;\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0.\end{cases}\tag{3.5.8}$$

令方程组(3.5.6)与(3.5.8)的系数矩阵分别为

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_m\\ \beta\end{bmatrix}.$$

为证 β 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，只须证秩 $B=$ 秩 $A\leqslant m<m+1$. 而秩 $A\leqslant m<m+1$ 显然，故只须证秩 $A=$ 秩 B. 为此，证方程组(3.5.6)与(3.5.8)同解．

事实上，因方程组(3.5.6)的解都是(3.5.7)的解，故(3.5.6)的解都是(3.5.8)的解．反之，(3.5.8)的解显然也是(3.5.6)的解，从而两方程组(3.5.6)与(3.5.8)同解．证毕

对于没有给出分量的向量组，其线性相关性可按下述各法证之.

法四 用线性相关，线性无关的定义证明.

利用定义证明线性相关性时，常用到下述命题：

命题 3.5.3 A 的行向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相(无)关的充要条件为 $X^{\mathrm{T}}A=\mathbf{0}$ 或 $A^{\mathrm{T}}X=\mathbf{0}$ 有非零解(只有零解)，其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

命题 3.5.4 A 的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相(无)关的充要条件是 $AX=\mathbf{0}$ 或 $X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$ 有非零解(只有零解)，其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$.

例 13 设 A 为 n 阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 n 个线性无关的 n 维列向量，证明秩 $A=n$ 的充要条件为 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关.

证 设 $x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+x_nA\alpha_n=\mathbf{0}$，即

$$x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+\cdots+x_nA\alpha_n$$
$$=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]X=A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X=\mathbf{0}.$$

因 A 可逆，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，故

$$\text{秩}(A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n])=\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=n,$$

且 $$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X=[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]X=\mathbf{0}$$

只有零解，于是 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关.

反之，若 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n$ 线性无关，则

$$[A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n]X=A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]X=\mathbf{0}$$

只有零解，因而秩$(A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n])=n$,

$$|A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]|=|A|\,|[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]|\neq 0,$$

故 $|A|\neq 0$，即秩 $A=n$.

例 14[4.12] 设向量组(Ⅱ)：$\beta_1,\cdots,\beta_r$ 能由向量组(Ⅰ)：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表出为 $\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_r\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}$，其中 K 为 $r\times s$ 矩阵，且组(Ⅰ)线性无关，证明组(Ⅱ)线性无关的充要条件是秩 $K=r$.

证 必要性证明见§2.13 例 7. 下证充分性.

令 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_r\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_r\end{bmatrix}$. 为证组（Ⅰ）线性无关，下证 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$ 只有零解.

事实上，由 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$，得到 $(X^{\mathrm{T}}K)A=\mathbf{0}$，因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，即秩 $A=s$，而 $X^{\mathrm{T}}K$ 为 s 维行向量，故 $(X^{\mathrm{T}}K)A=\mathbf{0}$ 只有零解，从而 $X^{\mathrm{T}}K=\mathbf{0}$. 同样，因秩 $K=r$，故 K 的 r 个行向量线性无关，而 X^{T} 为 r 维行向量，所以 $X^{\mathrm{T}}K=\mathbf{0}$ 也只有零解，因而 $X^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$，即 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$ 只有零解.

例 15 假定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 个向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合，如果 $m>n$，那么 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性相关.

证 设

$$\beta_1=a_{11}\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\cdots+a_{1n}\alpha_n;$$
$$\beta_1=a_{21}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\cdots+a_{2n}\alpha_n;$$
$$\cdots$$
$$\beta_m=a_{m1}\alpha_1+a_{m2}\alpha_2+\cdots+a_{mn}\alpha_n,$$

则

$$\begin{aligned}x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_m\beta_m=&(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m)\alpha_1+\\&(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m)\alpha_2+\cdots+\\&(a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m)\alpha_n,\end{aligned}$$

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \cdots\\x_m\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\cdot\begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\ \cdots\\x_m\end{bmatrix},\tag{3.5.9}$$

即

$$BX=[\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n]AX.$$

如 $m>n$，则因方程个数少于未知数个数，$AX=\mathbf{0}$ 必有非零解 X_0，将 X_0 代入(3.5.9)式，得到 $BX_0=\mathbf{0}$，即 $BX=\mathbf{0}$ 有非零解，故 β_1，

$\beta_2,\cdots,\beta_n$线性相关．证毕

为证向量组的线性相关性，常在矩阵等式或矩阵方程两端左乘有关矩阵．

例 16[4.24][1996 年 4]　设β是非齐次线性方程组$AX=b$的一个解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$是对应齐次方程组的一个基础解系，证明

(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关；

(2)$\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_{n-r},\beta$线性无关．

证　(1)证明一　设$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+k\beta=\mathbf{0}$，因$A\alpha_i=\mathbf{0}(i=1,2,\cdots,n-r)$，将$A$左乘上式两端得到$kA\beta=\mathbf{0}$，因$A\beta\neq\mathbf{0}$，故$k=0$，于是$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=\mathbf{0}$. 由于$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关，$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，从而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关．

(1)证明二　β不能由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性表出(非齐次线性方程组的任一解都不能由对应齐次方程组的基础解系线性表出)，又$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$(基础解系)线性无关，由命题 3.1.1 知，$\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\beta$线性无关．

(2)设$k_1(\beta+\alpha_1)+\cdots+k_{n-r}(\beta+\alpha_{n-r})+k\beta=\mathbf{0}$，

即
$$(k+k_1+\cdots+k_{n-r})\beta+k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}=\mathbf{0}.$$

由(1)知$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$线性无关，故

$$k+k_1+\cdots+k_{n-r}=0,k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0,$$

从而$k=0$，于是$\alpha_1+\beta,\alpha_2+\beta,\cdots,\alpha_{n-r}+\beta,\beta$线性无关．

例 17[1993 年 1,2]　设A为$n\times m$矩阵，B是$m\times n$矩阵，其中$n<m$，E是n阶单位矩阵，若$AB=E$，证明B的列向量组线性无关．

证明一　设$B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$，其中$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$是$B$的列向量. 又设$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=\mathbf{0}$，下证$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

由$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\cdots+x_n\beta_n=\mathbf{0}$得到

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=BX=\mathbf{0},\text{其中 } X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}.$$

在上矩阵方程两边左乘矩阵 A 得到

$$ABX=A\cdot\mathbf{0},\text{即 } EX=X=\mathbf{0},$$

故 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

证明二 显然秩 $B\leqslant n$；又秩 $B\geqslant$ 秩$(AB)=$秩 $E=n$，故秩 $B=n$，所以 B 的列向量线性无关.

例 18[1998 年 1] 设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^kX=\mathbf{0}$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq\mathbf{0}$，证明：向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

证 设常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，使得

$$\lambda_1\alpha+\lambda_2A\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=\mathbf{0}.$$

下证 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots\lambda_k=0$. 为此在上等式两端左乘 A^{k-1}，得到

$$\lambda_1A^{k-1}\alpha+\lambda_2A^k\alpha+\cdots+\lambda_kA^{2k-2}\alpha=\mathbf{0}.$$

因 $A^k\alpha=\mathbf{0}$，又 k 为正整数，故 $A^{k+1}\alpha=A^{k+2}\alpha=\cdots=A^{2k-2}\alpha=\mathbf{0}$. 于是有 $\lambda_1A^{k-1}\alpha=\mathbf{0}$. 因 $A^{k-1}\alpha\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda_1=0$. 代入上等式得到

$$\lambda_2A\alpha+\lambda_3A^2\alpha+\cdots+\lambda_kA^{k-1}\alpha=\mathbf{0}.$$

在上等式两端左乘 A^{k-2}，同法可证 $\lambda_2=0$. 如此继续可证 $\lambda_3=\cdots=\lambda_k=0$，因而向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 线性无关.

法五 反证法

因线性相关与线性无关是两个互相对立的概念，在证明线性相关性的命题中，反证法是常用的有效方法.

例 19 假设在向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中，$\alpha_1\neq\mathbf{0}$，且每个 $\alpha_i(i=1,2,3,\cdots,m)$都不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$线性表出，试证这向量组线性无关.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，设法找到一个 α_j，它可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$的线性组合，这与题设矛盾，从而证明了该向量组线性无关.

事实上，由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，必存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=\mathbf{0}$. 将这些系数从后面向前面排列，得到 $k_m,k_{m-1},\cdots,k_2,k_1$. 自左至右，设第 1 个不为零的系数为 $k_j(1<j\leqslant m)$，即

$$k_m=k_{m-1}=\cdots=k_{j+1}=0,k_j\neq 0,$$

于是有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_j\alpha_j=\mathbf{0},k_j\neq 0,$$

且 $j\neq 1$. 如果 $j=1$，则 $k_1\alpha_1=\mathbf{0}$. 由 $k_1\neq 0$，得到 $\alpha_1=\mathbf{0}$，与题设 $\alpha_1\neq\mathbf{0}$ 矛盾. 因 $k_j\neq 0(j>1)$，上式可改写为

$$\alpha_j=-(k_1/k_j)\alpha_1-(k_2/k_j)\alpha_2-\cdots-(k_{j-1}/k_j)\alpha_{j-1}.$$

这表明 α_j 可由它前面的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{j-1}$ 线性表出.

法六　利用向量组的等价性证明(参看§3.6 法三)

此法主要用于要判定的向量组与已知的向量组具有相同的线性相关性. 特别，已知一组向量线性无关，欲证用其性线表出的另一组向量也线性无关，常用等价必等秩的结论证之.

例 20[4.8]　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量，已知 n 维单位坐标向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可被它们线性表出，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明一　因任一 n 维向量都可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也可由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，又由题设推知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价. 等价必等秩，因 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明二　由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可被 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出可知，两个向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n; \tag{3.5.10}$$

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n, \tag{3.5.11}$$

等价，故其秩必等，显然组(3.5.10)的秩 $\leqslant n$，但因 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，故组(3.5.11)的秩 $\geqslant n$，因而组(3.5.10)的秩必为 n，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

证明三 用下述四种方法证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩为 n.

法(i)由 $\varepsilon_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{in}\alpha_n\quad(i=1,2,\cdots,n)$ 题设有

即
$$E=AB,\tag{3.5.12}$$
其中 E 为 n 阶单位矩阵,n 个行向量依次为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$, $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, B 为阶矩阵,其 n 个行向量依次为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

由 A,B 为方阵及(3.5.12)式知 B 可逆,其秩为 n,等于所含行向量个数,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

法(ii)由(3.5.12)式知
$$n=秩\,E=秩(AB)\leqslant\min\{秩\,A,秩\,B\},$$
故秩 $B\geqslant n$,又 B 为 n 阶方阵,所以秩 $B\leqslant n$,从而秩 $B=n$,故行向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

法(iii)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的秩为 r,因 α_i 为 n 维向量,故 $r\leqslant n$;由(3.5.12)知 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,当然也可由其最大无关组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 线性表出,又 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关,根据命题 3.8.1 知 $n\leqslant r$,从而 $n=r$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

法(iv)因 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,由命题 2.14.1 知
$$秩[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]\leqslant秩[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n].$$
但秩$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]=n$,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 只有 n 个向量. 因此秩$[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$只能等于 n,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

习　题　3.5

1. 设 $\alpha_1=[1,1,1]$,$\alpha_2=[a,0,b]$,$\alpha_3=[1,3,2]$,若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,求 a 和 b 所满足的关系式.

2. 若 $\beta=[0,k,k^2]$能由 $\alpha_1=[1+k,1,1]$,$\alpha_2=[1,1+k,1]$,$\alpha_3=[1,1,1+k]$唯一地线性表出,求 k.

3. [1989 年 4,5][选择题] 设 A 是 n 阶矩阵,且 $|A|=0$,则____.

(A)A 中必有两行(列)的元素对应成比例

(B)A 中任意一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(C)A 中必有一行(列)向量是其余各行(列)向量的线性组合

(D)A 中至少有一行(列)的元素全为零.

4.[选择题] 设向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)分别为

$\alpha_1=[a_{11},a_{12},a_{13}],\alpha_2=[a_{21},a_{22},a_{23}],\alpha_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]$

与 $\beta_1=[a_{11},a_{12},a_{13},a_{14}],\beta_2=[a_{21},a_{22},a_{23},a_{24}],\beta_3=[a_{31},a_{32},a_{33},a_{34}]$

则下列结论正确的是____.

(A)若组(Ⅰ)线性相关,则组(Ⅱ)线性相关

(B)若组(Ⅰ)线性无关,则组(Ⅱ)线性无关

(C)若组(Ⅱ)线性无关,则组(Ⅰ)线性无关

(D)若组(Ⅱ)线性相关,则组(Ⅰ)线性相关

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关,且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出,证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关.

6. 已知向量组 $\alpha_1=[t,2,1],\alpha_2=[2,t,0],\alpha_3=[1,-1,1]$,试求出 t 为何值时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关? 线性无关?

7.[4.9] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一组 n 维向量,证明它们线性无关的充要条件是任一 n 维向量可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

8. 证明两向量 $\alpha=[a_1,a_2],\beta=[b_1,b_2]$线性相关的充分必要条件是 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

9.[1992 年 4][选择题] 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,齐次线性方程组 $AX=0$ 仅有零解的充分条件是____.

(A)A 的列向量线性无关　　(B)A 的列向量线性相关

(C)A 的行向量线性无关　　(B)A 的行向量线性相关

10.[1993 年 5] 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 是 $n\times m$ 矩阵,E 是 n 阶单位矩阵($m>n$),已知 $BA=E$,试判断 A 的列向量组是否线性相关? 为什么?

11. 设向量组(Ⅰ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能用向量组(Ⅱ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出为

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_r\end{pmatrix}=K\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{pmatrix}$$

其中 K 为 $r\times s$ 矩阵,且组(Ⅱ)线性无关,则组(Ⅰ)线性相关的充要条件是秩 $K<r$.

§ 3.6 如何证明用线性无关向量组线性表出的向量组的线性相关性

当线性表出的系数已知时，可利用线性相关、线性无关的定义及系数矩阵的秩证明；当线性表出的系数没有给出时，可用向量组的等价性证明之．

法一 用线性相关，线性无关的定义证明

例 1 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，试问常数 m,k 满足什么条件时，向量组 $k\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关，线性相关．

解 用定义证明．设

$$\lambda_1(k\alpha_2-\alpha_1)+\lambda_2(m\alpha_3-\alpha_2)+\lambda_3(\alpha_1-\alpha_3)=\mathbf{0},$$

即
$$(\lambda_3-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda_1k-\lambda_2)\alpha_2+(\lambda_2m-\lambda_3)\alpha_3=\mathbf{0}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases}-\lambda_1 \qquad\qquad +\lambda_3=0; \\ k\lambda_1-\lambda_2 \qquad\quad =0; \text{其系数行列式 } D=km-1. \\ \qquad m\lambda_2-\lambda_3=0.\end{cases}$$

(1)当 $D=km-1\neq0$ 即 $km\neq1$ 时，上方程组只有零解，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，从而 $k\alpha_2-\alpha_1,m\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关．

(2)当 $D=km-1=0$ 即 $km=1$ 时，上方程组有非零解，所给向量组线性相关．**解毕．**

上例向量组线性相关性的证明关键在于线性表出

$$\begin{pmatrix}k\alpha_2-\alpha_3\\ m\alpha_3-\alpha_2\\ \alpha_1-\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & k & 0\\ 0 & -1 & m\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$$

的系数矩阵行列式 $D=km-1$ 是否等于零．一般有下述结论(§ 3.5 例 14)：

命题 3.6.1 设向量组(Ⅰ)：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 能用向量组(Ⅱ)：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出为

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \cdots\\ \beta_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{11} & \cdots & k_{1s}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ k_{r1} & \cdots & k_{1s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}=K\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}, \qquad (3.6.1)$$

其中矩阵 $K=[k_{ij}]_{r\times s}$，且组(Ⅱ)线性无关，则组(Ⅰ)线性无关的充分必要条件是线性表出的系数矩阵 K 的秩等于 r，即秩 $K=r$.

法二 用线性表出的系数矩阵 K 的秩来判别：

(i)当秩 $K=r$(组(Ⅰ)的向量个数)，组(Ⅰ)线性无关；

(ii)当秩 $K<r$(组(Ⅰ)的向量个数)，组(Ⅰ)线性相关.

当组(Ⅰ)和组(Ⅱ)所含向量个数相等时，组(Ⅰ)的线性相关性的判别可用线性表出的系数矩阵 K 的行列式判别：

(i)′ 当 $|K|\neq 0$ 时，组(Ⅰ)线性无关；

(ii)′ 当 $|K|=0$ 时，组(Ⅰ)线性相关.

这样讨论组(Ⅰ)的线性相关性不必直接从定义入手，只须计算线性表出的系数矩阵的秩，或其行列式即可.

例 2[1989 年 4，5] 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$线性无关. 设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\quad \beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\quad \beta_s=\alpha_s+\alpha_a.$$

讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

解 由题设可知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 可用线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出：

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdots\\ \beta_s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \cdots\\ \alpha_s\end{bmatrix}$$

因 $$|K|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}_{s\times s}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\end{vmatrix}+$$

$$1\cdot(-1)^{1+s}\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\\0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}$$

$$=1+(-1)^{1+s}.$$

故当 s 为偶数时，$|K|=0$，从而秩 $K<s$，所以 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_s$ 线性相关；

当 s 为奇数时，$|K|\neq 0$ 时，从而秩 $K=s$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关.

例 3[1997 年 3,4][选择题] 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是____.

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_2+3\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$

解 将(A)、(B)、(C)、(D)中向量分别用线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出：

(A) $\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_3+\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ 计算易得到 $|K|=0$，

(B) $\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_2+\alpha_3\\\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ 计算易得 $|K|=0$，

$$\text{(C)}\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2\\2\alpha_2+3\alpha_3\\3\alpha_3+\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&3\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\text{计算易得}|K|=12\neq 0,$$

$$\text{(D)}\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3\\3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-3&22\\3&5&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\text{算得}|K|=0,$$

故只有(C)中向量线性无关.

例 4 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,又有向量组

$$\beta_1=l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+l_{13}\alpha_3$$

$$\beta_2=l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+l_{23}\alpha_3$$

$$\beta_2=l_{31}\alpha_1+l_{32}\alpha_2+l_{33}\alpha_3$$

$$\beta_4=l_{41}\alpha_1+l_{42}\alpha_2+l_{43}\alpha_3$$

讨论 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 的线性相关性.

证 将 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 用线性无关向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出为

$$\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_2\\\beta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}\alpha_1+l_{12}\alpha_2+l_{13}\alpha_3\\l_{21}\alpha_1+l_{22}\alpha_2+l_{23}\alpha_3\\l_{31}\alpha_1+l_{32}\alpha_2+l_{33}\alpha_3\\l_{41}\alpha_1+l_{42}\alpha_2+l_{43}\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\\l_{41}&l_{42}&l_{43}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,故当

$$\text{秩 } K=\text{秩}\begin{pmatrix}l_{11}&l_{12}&l_{13}\\l_{21}&l_{22}&l_{23}\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\\l_{41}&l_{42}&l_{43}\end{pmatrix}<4,$$

时,β_1、β_1、β_3、β_4 线性相关;当秩 $K=4$ 时,线性无关.

法三 利用向量组的等价性证明

此法主要用在没有给出线性表出系数矩阵的情况. 此法在上节已提及(详见§3.5例20). 下面再举一例说明之.

例 5 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,且可经向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表出,证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关.

证　先证 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 等价．

考虑向量组 $\beta_j,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r(j=1,2,\cdots,r)$．由于 $\beta_j,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表出，且 $r+1>r$，由§3.5 例 15 可知，$\beta_j,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性相关．又题设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关．因此由命题 3.1.2 知 β_j 一定可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出($j=1,2,\cdots,r$)，于是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出，再由题设知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 等价．

再证 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关．事实上，已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩为 r，等价必等秩，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的秩亦为 r，即 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关．

习　题 3.6

1.[4.5]　如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，证明向量组 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s$ 线性无关．

2.[选择题]　设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$.　　(B)$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

(C)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.　　(D)$\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_2+\alpha_3,3\alpha_3+\alpha_1$.

3.[1994 年 1,2][选择题]　已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则下列各命题中正确的是____.

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$　线性无关

(B)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　线性无关

(C)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　线性无关

(D)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$　线性无关

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{m}b_{ij}\alpha_j(i=1,2,\cdots,m)$．证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充要条件是 $|B|=|b_{ij}|_{m\times m}\neq 0$.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，问当 k 为何值时，向量组 $\alpha_2-\alpha_1,k\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$ 线性无关．

§ 3.7　最(极)大无关组的求法

法一　根据下述两定义(定义 3.7.1 和定义 3.7.2)求之．

定义 3.7.1　向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 中含向量个数最多的线性无关部分组都称为该向量组的最(极)大线性无关组，简称最(极)大无关组．

例 1　设 $\alpha_1=[1,0,0],\alpha_2=[0,1,0],\alpha_3=[0,3,0]$，试用定义求出该向量组的所有最大无关组．

解　该向量组共分 7 个部分组：

(1)α_1；　(2)α_2；　(3)α_3；　(4)α_1,α_2；

(5)α_1,α_3；　(6)α_2,α_3；　(7)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

因 $\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3$ 为非零向量，故第 1,2,3 个部分向量组线性无关，又因 α_1 与 α_2;α_1 与 α_3 的对应分量不成比例，第 4,5 个部分向量组也线性无关．而 α_2,α_3 对应分量成比例，第 6 个部分向量组线性相关，第 7 个部分向量组因含一线性相关向量组线性相关．

由此可知，七个部分组中，前五个部分组都是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性无关部分组，而第四和第五个是含向量个数最多的线性无关部分组，由定义，它们都是该向量组的最大无关组．解毕

最大无关组这概念十分重要，只有正确理解了这概念才能顺利地学习线性代数后续的内容，因此下面特给出这概念的不同叙述，即等价叙述．这些叙述是从不同侧面描述定义 3.7.1 中线性无关部分组含向量个数最多的含义．

如部分组线性无关，且满足下列条件之一就称为一个最(极)大无关组：

(i)添进原组中其余的任一向量(如还有的话)，所得的新向量组必线性相关；

(ii)原组中其余的每个向量都可由这部分组线性表出；

(ii)部分组与原组等价．

定义 3.7.2 假定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是某向量组中的 m 个向量，如果(1)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关；

(2)向量组中任一向量是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合，

那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 叫做该向量组的一个最(极)大无关组．

从上述定义可看出，只有原向量组本身线性无关，它才是该向量组唯一的一个最大无关组．一般，向量组的最大无关组不唯一，如原向量组中的某部分向量组是一个最大无关组，那么原向量组可能有由不同向量组成的多个最大无关组．各个最大无关组的向量不完全相同，但所含向量的个数都相等．除由单个零向量组成的向量组外，其他向量组都有最大无关组．

例 2 设有 5 个向量组成的向量组

$\alpha_1=[3,1,2,5],\alpha_2=[1,1,1,2],\alpha_3=[2,0,1,3],$

$\alpha_4=[1,-1,0,1],\alpha_5=[4,2,3,7].$

求此向量组的一个最大无关组，并用它表示其余向量．

解 α_1,α_2 线性无关，且该向量组的任一向量能表成它们的线性组合：

$$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2,\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_5=\alpha_1+\alpha_2. \qquad (3.7.1)$$

由定义 3.7.2 可知，部分组 α_1,α_2 是其一个最大无关组．

事实上，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 中任意两个不同向量均为一个最大无关组．今任取 α_1,α_5 两向量，显然它们线性无关，又由(3.7.1)式不难得到 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均可写成 α_1,α_5 的线性组合：

$$\alpha_2=\alpha_5-\alpha_1,$$
$$\alpha_3=\alpha_1-\alpha_2=\alpha_1-(\alpha_5-\alpha_1)=2\alpha_1-\alpha_5,$$
$$\alpha_4=\alpha_1-2\alpha_2=\alpha_1-2(\alpha_5-\alpha_1)=3\alpha_1-2\alpha_5,$$

故 α_1,α_5 也是一个最大无关组．同样可证

$$\alpha_1,\alpha_3;\quad \alpha_1,\alpha_4;\quad \alpha_2,\alpha_3;\quad \alpha_2,\alpha_4;$$
$$\alpha_2,\alpha_5;\quad \alpha_3,\alpha_4;\quad \alpha_3,\alpha_5;\quad \alpha_4,\alpha_5$$

均分别为一个最大无关组．

法二 初等行变换法．

用初等行变换求向量组的最(极)大无关组有两种方法.

一种是根据命题 3.2.1 以所给向量为列向量作矩阵 A,对此矩阵进行初等行变换(且只能进行初等行变换),直到能看出变换矩阵中列向量组的一个最(极)大无关组为止. 由命题 3.2.1,此最(极)大无关组在原向量组中所对应的向量组就是所求的一个最(极)大无关组.

为能看出变换矩阵的一个最大无关组常将 A 化为行阶梯形;如将行阶梯形进一步化成含最高阶单位矩阵的形式时,根据命题 3.2.1 还可直接求出其余向量表成最大无关组的线性组合.

例 3[1994 年 5][选择题] 设有向量组 $\alpha_1=[1,-1,2,4]$,

$$\alpha_2=[0,3,1,2],\qquad \alpha_3=[3,0,7,14],$$
$$\alpha_4=[1,-2,2,0],\quad \alpha_5=[2,1,5,10]$$

则该向量组的极大无关组为____.

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,　　　(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(C)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$,　　　(D)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

解 将所给向量组作为列向量组成矩阵 A,施行初等行变换,易得到

$$A=[\alpha_1^{\mathrm T},\alpha_2^{\mathrm T},\alpha_3^{\mathrm T},\alpha_4^{\mathrm T},\alpha_5^{\mathrm T}]=\begin{bmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-2&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&10\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{变 换}]{\text{初等行}}\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5]=A_1.$$

在 A_1 中显然 η_1,η_2,η_4;η_1,η_3,η_4;η_1,η_5,η_4 分别为一个极大无关组,且 $\eta_5=2\eta_1+\eta_2$,$\eta_3=3\eta_1+\eta_2$. 由命题 3.2.1 得到该向量组的极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$;$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$;$\alpha_1,\alpha_5,\alpha_4$,且 $\alpha_5=2\alpha_1+\alpha_2$,$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2$,故(B)入选.

例 4[1999 年 2]　设向量组

$$\alpha_1=[1,1,1,3]^T,\alpha_2=[-1,-3,5,1]^T,$$
$$\alpha_3=[3,2,-1,p+2]^T,\alpha_4=[-2,-6,10,p]^T.$$

(1)p 为何值时，该向量组线性无关？并在此时将向量 $\alpha=[4,1,6,10]^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性表出．

(2)p 为何值时，该向量组线性相关？并在此时求出它的秩和一个极大线性无关组．

解　令矩阵 $A=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \vdots\ \alpha]$. 初等行变换将其化为行阶梯形矩阵：

$$A\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -1 & 3 & -2 & 4\\ 0 & -2 & -1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7\\ 0 & 0 & p-9 & p-2 & -8\end{array}\right]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta]=A_1.$$

(1)当 $p-2\neq0$ 即 $p\neq2$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．这时，对矩阵 A_1 进行初等行变换将其化为含最高阶单位矩阵：

$$A_1\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & (4-3p)/(2-p)\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & (1-p)/(p-2)\end{array}\right],$$

即得 $\alpha=2\alpha_1+[(3p-4)/(p-2)]\alpha_2+\alpha_3+[(1-p)/(p-2)]\alpha_4$. 或设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4$，也可解得上述结果．

(2)当 $p=2$ 时，对$[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4]$进行初等行变换，将其化为含最高阶单位矩阵的矩阵，得到

$$[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4]=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -7 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由命题 3.2.1 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大线性无关组，因而其秩等于 3，且

$$\alpha_4=0\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3=2\alpha_2.$$

法三　初等列变换法

同初等行变换的情况一样，使用初等列变换求向量组的最大无关组是利用下面与命题 3.2.1 相类似的命题求之.

命题 3.7.1　设矩阵 $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \cdots\\ \beta_m\end{pmatrix}$ 经若干次限于初等列变换变为矩阵 $B_1=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \cdots\\ \delta_m\end{pmatrix}$，则 B 的任意 k 个行向量与 B_1 中对应的 k 个行向量有相同的线性相关性(初等列变换不改变行向量之间的线性关系)，即

(1)当且仅当 B_1 的 k 个行向量 $\delta_{j_1},\delta_{j_2},\cdots,\delta_{j_k}$ 线性无关时，B 中对应的 k 个行向量 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_k}$ 线性无关；

(2)当且仅当 B_1 中某个行向量 δ_s 可表为某些行向量 $\delta_i,\delta_t,\cdots,\delta_r$ 的线性组合：

$$\delta_s=b_i\delta_i+b_t\delta_t+\cdots+b_r\delta_r$$

时，B 中与其对应的行向量 β_s 也可表为行向量 $\beta_i,\beta_t,\cdots,\beta_r$ 的线性组合：

$$\beta_s=b_i\beta_i+b_t\beta_t+\cdots+b_r\beta_r.$$

例 5　利用初等列变换求下列矩阵的行向量组的一个最大无关组：

(1) $A=\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{bmatrix}$；(2) $B=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}$.

解　用初等列变换求矩阵的行向量组的最大无关组，要将矩

阵化为$\begin{bmatrix} \diagdown & 0 \\ * & \diagdown \end{bmatrix}$之形状.

$$(1)A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1(1/5)}\begin{bmatrix}1&31&17&43\\3&94&53&132\\3&94&54&134\\1&32&20&48\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4-43c_1]{\substack{c_2-31c_1\\c_3-17c_1}}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&1&2&3\\3&1&3&5\\1&1&3&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3-3c_2\\c_4-3c_2}]{c_1-3c_2}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&0&2\\-2&1&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2+(-1/2)c_4]{c_2+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\\-2&0&0&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_4]{c_3(-1)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&2&0&0\\-2&2&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2\leftrightarrow c_3]{c_2(1/2)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-2&0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_1\\\delta_2\\\delta_3\\\delta_4\end{bmatrix}=A_1$$

显然 A_1 中前三个行向量 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 线性无关,而 $\delta_4=-2\delta_1+0\delta_2+1\delta_3$,故 $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ 为 A_1 的行向量组的一个最大无关组. 由命题3.7.1知,A 中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其行向量组的一个最大无关组,且 $\alpha_4=-2\alpha_1+\alpha_3$.

又因 A_1 中 δ_2 不能用其余3个行向量组性表出,故其最大无

关组必含 δ_2，因而 A 中行向量组的一个最大无关组必含 α_2.

注意 求矩阵列向量组的最大无关组，用初等行变换，将其化为$\begin{bmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{bmatrix}$之形状，而求矩阵行向量的最大无关组，用初等列变换将其化为$\begin{bmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{bmatrix}$之形状，两者不要混淆.

例 6[1990 年 1,2] 已知向量组 $\alpha_1=[1,2,3,4]$，$\alpha_2=[2,3,4,5]$，$\alpha_3=[3,4,5,6]$，$\alpha_4=[4,5,6,7]$，求该向量组的秩及一个最大无关组，并把其余向量表成最大无关组的线性组合.

解 以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为行向量作矩阵 A，并对 A 进行初等列变换：

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3+(-3)c_1\\ c_4+(-4)c_1}]{c_2+(-2)c_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-2&-3\\3&-2&-4&-6\\4&-3&-6&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_4+(-3)c_2]{c_3+(-2)c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\3&-2&0&0\\4&-3&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{c_1+2c_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\-1&-2&0&0\\-2&-3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&0&0\\-2&3&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\\ \delta_4\end{pmatrix}=A_1.$$

显然 A_1 中前两个行向量 δ_1,δ_2 线性无关，为 $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ 的一个最大无关组；且其余两个行向量可表成 δ_1,δ_2 的线性组合：

$$\delta_3=-\delta_1+2\delta_2,\qquad \delta_4=-2\delta_1+3\delta_2.$$

由命题 3.7.1 得到 α_1,α_2 线性无关，为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个最大无关组，其秩为 2，且

$$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2,\qquad \alpha_4=-2\alpha_1+3\alpha_2.$$

法三 逐个删去法.

对于所给向量组中的向量按自左至右顺序逐个删去可由其前

(即左)面向量线性表出的向量,由§3.5例19(或由命题3.1.1)可知,所剩向量组线性无关,且为所给向量组的一个极大无关组.

例7 试确定下列向量组的一个极大无关组:

$$\alpha_1=[1,2,3],\alpha_2=[2,4,4],\alpha_3=[1,0,3],$$
$$\alpha_4=[0,4,-2],\alpha_5=[0,1,0].$$

解 $\alpha_1\neq 0$,线性无关,保留.考察α_2,因$\alpha_2=2\alpha_1$,可由其前面向量α_1线性表出,删去.再考察α_3,因α_1,α_3线性无关,α_3不能由α_1线性表出,保留.因$\alpha_4=2\alpha_1-3\alpha_3$,可由其前面向量$\alpha_1,\alpha_3$线性表出,删去.又因$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$线性无关,$\alpha_5$不能由其前面向量$\alpha_1,\alpha_3$线性表出,保留.如此保留下来的部分向量组$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$线性无关,且其余向量(即删去的所有向量)均可由它们线性表出,故$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_5$是所求的一个极大无关组.

法四 利用矩阵的子式求之.

以所给向量为行(或列)向量作矩阵A,如果A的某个r阶子式D_r是A的最高阶不等于零的子式,则D_r所在的r个行(或列)向量即是矩阵A的行(或列)向量组的一个最大无关组.

如何求A的最高阶不等于零的子式D_r呢?先求出一个不等于零的r阶子式D_r,如果D_r的所有加边子式(即包含D_r的子式)全等于零,则D_r即为A的最高阶不等于零的子式.

例8 求下列向量组的一个最大无关组,已知

$\alpha_1=[1,0,1,0,1]^T$, $\alpha_2=[0,1,-1,1,0]^T$,

$\alpha_3=[-1,0,0,-1,0]^T$, $\alpha_4=[0,-1,0,0,-1]^T$,

$\alpha_5=[1,0,1,1,1]^T$, $\alpha_6=[0,1,-1,0,0]^T$.

解 以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$为列向量作矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\\1&-1&0&0&1&-1\\0&1&-1&0&1&0\\1&0&0&-1&1&0\end{bmatrix}$$

易验证 A 中 4 阶子式 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0 & 1\\0 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$，因其加边子式只一个 D_5（它是在 D_4 的基础上加上 A 的最后一行，最后一列所得的 5 阶子式），易验证 $D_5=0$，故 D_4 为 A 的一个不等于零的最高阶子式，D_4 所在的列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 为 A 的即为上述向量组的一个最大无关组．

习　　题　3.7

1. 求出 $\alpha_1=[2,-1,3,5]$，$\alpha_2=[4,-3,1,5]$，$\alpha_3=[3,-2,3,4]$，

$\alpha_4=[8,-4,16,16]$，，$\alpha_5=[7,-6,-7,0]$

的一个极大无关组，并将其余向量表成它的线性组合．

2. [4.6(2)]　利用初等行变换求下列矩阵的列向量组的一个最大无关组：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\0 & 2 & 1 & 5 & -1\\2 & 0 & 3 & -1 & 3\\1 & 1 & 0 & 4 & -1\end{bmatrix}.$$

3. [4.7(2)]求下列向量组的秩，并求一个最大无关组：

$\alpha_1=[1,2,1,3]$，$\alpha_2=[4,-1,-5,-6]$，$\alpha_3=[1,-3,-4,-7]$.

§3.8　最大无关组在证题中的两个应用

本节主要讨论最大无关组在证明向量组的秩的不等式和向量组的等价性方面的两个应用．前者需用到下述命题（§3.5 例 15 的逆否命题）：

命题 3.8.1　设向量组（Ⅰ）：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，且可经

向量组(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出,则组(Ⅰ)所含向量个数 m 不大于组(Ⅱ)所含向量个数,即 $m\leqslant n$.

为满足命题 3.8.1 中线性无关的条件,常取向量组的最大无关组,又因向量组的秩就是其最大无关组所含向量的个数,于是利用命题 3.8.1 证明两向量组的秩的大小问题转化为证明其最大无关组所含向量个数的大小问题.

证明时,应注意下述思路:遇有一组向量可用另一组向量线性表出的题设或题断时,要想到取最大无关组,作出线性无关的向量组,利用命题 3.8.1 去证明有关向量组的秩的大小的命题.

例 1 设向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r_1,向量组(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩为 r_2,若组(Ⅰ)能用组(Ⅱ)线性表出,则 $r_1\leqslant r_2$.

证 因有"线性表出"题设,分别取组(Ⅰ),组(Ⅱ)的最大无关组,设为

组(Ⅰ)$'$:$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$ 与组(Ⅱ)$'$:$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$.

因组(Ⅰ)能用组(Ⅱ)线性表出,而组(Ⅱ)能用组(Ⅱ)$'$线性表出,故组(Ⅰ)也能用组(Ⅱ)$'$线性表出,从而组(Ⅰ)的部分向量组(Ⅰ)$'$也能用组(Ⅱ)$'$线性表出,显然组(Ⅰ)$'$线性无关,于是对组(Ⅰ)$'$与组(Ⅱ)$'$利用命题 3.8.1 得到 $r_1\leqslant r_2$.

例 2[4.10] 设组(Ⅰ)和组(Ⅱ)分别为(3.4.1),(3.4.2)式所示,其秩分别为 r_1,r_2. 向量组(Ⅲ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,其秩为 r_3,证明 $r_3\leqslant r_1+r_2$.

证 显然,组(Ⅰ)和组(Ⅱ)都可由组(Ⅲ)线性表出,因而取它们的最大无关组,分别设为

组(Ⅰ)$'$:$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$;组(Ⅱ)$'$:$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$;

组(Ⅲ)$'$:$\delta_{t_1},\delta_{t_2},\cdots,\delta_{t_{r_3}}$;

又设组(Ⅳ)$'$:$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$.

因组(Ⅲ)能由组(Ⅳ)$'$线性表出,其部分组(Ⅲ)$'$也能由(Ⅳ)$'$线性表出,且组(Ⅲ)$'$线性无关,对组(Ⅲ)$'$与组(Ⅳ)$'$利用命题

3.8.1 得到 $r_3\leqslant r_1+r_2$.

例 3 设向量组(Ⅰ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$;组(Ⅱ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$;组(Ⅲ):$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$的秩分别为 s_1,s_2,s_3. 如果

$$\gamma_i=\alpha_i-\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots,m),$$

则

$$s_1\leqslant s_2+s_3,s_2\leqslant s_1+s_3,s_3\leqslant s_1+s_2.$$

证 作组(Ⅳ):$\gamma_1+\beta_1,\gamma_2+\beta_2,\cdots,\gamma_m+\beta_m$,由题设有

$$\alpha_i=\gamma_i+\beta_i \qquad (i=1,2,\cdots,m), \tag{3.8.1}$$

因而组(Ⅰ)能由组(Ⅳ)线性表出,而组(Ⅳ)能由

组(Ⅴ):$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m$

线性表出,取组(Ⅰ),组(Ⅱ),组(Ⅲ)的最大无关组分别为

组(Ⅰ)′:$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{s_1}}$,组(Ⅱ)′:$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{s_2}}$,

组(Ⅲ)′:$\gamma_{k_1},\cdots,\gamma_{k_{s_3}}$.

又作组(Ⅴ)′:$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{s_2}},\gamma_{k_1},\gamma_{k_2},\cdots,\gamma_{k_{s_3}}$.

组(Ⅰ)′可由组(Ⅰ)线性表出,由(3.8.1)式可知,组(Ⅰ)可由组(Ⅳ)线性表出,又组(Ⅳ)可由组(Ⅴ)线性表出,而组(Ⅴ)可由组(Ⅴ)′线性表出,故组(Ⅰ)′可由组(Ⅴ)′线性表出,由命题 3.8.1 知 $s_1\leqslant s_2+s_3$.

同理可证 $s_2\leqslant s_1+s_3,s_3\leqslant s_1+s_2$. 证毕

由上两例可知,凡证明秩和的大小命题(例如证 $s_2+s_3\geqslant s_1,r_1+r_2\geqslant r_3$ 等),常由两向量组的最大无关组作一新向量组,例如作

$$\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{s_2}},\gamma_{k_1},\gamma_{k_2},\cdots,\gamma_{k_{s_3}} \tag{3.8.2}$$

或

$$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}} \tag{3.8.3}$$

归结证明另一向量组(例如秩为 s_1,或秩为 r_3 的向量组)的最大无关组(例如 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{s_1}}$,或 $\delta_{t_1},\delta_{t_2},\cdots,\delta_{t_{r_3}}$)能由这新向量组[例如(3.8.2)式或(3.8.3)式向量组]线性表出.

例 4[4.10] 设组(Ⅰ),组(Ⅱ)分别为(3.4.1)式、(3.4.2)式所示,其秩分别为 r_1,r_2;组(Ⅲ):$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的秩为 r_3,则

$$\max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

证 后一结论在本节例 2 中已证，下只证前一结论．

显然，组（Ⅰ）和组（Ⅱ）都能由组（Ⅲ）线性表出，取其最大无关组，分别设为

组（Ⅰ）$'$：$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_{r_1}}$； 组（Ⅱ）$'$：$\beta_{j_1},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$；

组（Ⅲ）$'$：$\gamma_{t_1},\cdots,\gamma_{t_{r_3}}$．

因组（Ⅲ）可由组（Ⅲ）$'$线性表出，而组（Ⅰ），组（Ⅱ）都分别可由组（Ⅲ）线性表出，故组（Ⅰ），组（Ⅱ）都分别可由组（Ⅲ）$'$线性表出．而组（Ⅰ）$'$，组（Ⅱ）$'$分别为组（Ⅰ），组（Ⅱ）的部分向量组，故组（Ⅰ）$'$，组（Ⅱ）$'$分别可由组（Ⅲ）$'$线性表出．又组（Ⅰ）$'$，组（Ⅱ）$'$都分别线性无关，于是对组（Ⅰ）$'$和组（Ⅲ）$'$，组（Ⅱ）$'$与组（Ⅲ）$'$分别使用命题 3.8.1 得到

$$r_1\leqslant r_3,r_2\leqslant r_3 \quad 即 \quad \max\{r_1,r_2\}\leqslant r_3. \quad 证毕.$$

证明向量组的秩的大小问题，可直接利用本节例 1 的结论．

例 5 设 n 维向量组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，且可由向量组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性表出．证明秩 $B=n$.

证 因向量组 A 能用向量组 B 线性表出，由本节例 1 有 $n=$秩 $A\leqslant$秩 B. 另一方面任一 n 维向量组的秩不超过 n，故秩 $B\leqslant n$，于是秩 $B=n$. 例得证．

应用二 证明两向量组等价．

设组 A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 能用组 B：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性表出．为证组 B 也能用组 A 线性表出，只须证线性表出的系数矩阵 K 可逆即可．

例 6 设向量组 A 与向量组 B 的秩相等，且组 A 能用组 B 线性表出，证明组 A 与组 B 等价．

证明一 设秩 $A=$秩 $B=t$，且设组 A 与组 B 的最大无关组分别为

$$组（Ⅰ）：\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}；组（Ⅱ）：\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}.$$

因组 A 能用组 B 线性表出，故组（Ⅰ）也能用组（Ⅱ）线性表出．不

妨设

$$\begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \cdots \\ \alpha_{i_t} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ \cdots \\ \beta_{j_t} \end{pmatrix}$$

因组(Ⅰ)与组(Ⅱ)线性无关，由§3.5例14可知秩 $K=t$，从而 K 可逆，于是有

$$\begin{pmatrix} \beta_{j_1} \\ \cdots \\ \beta_{j_t} \end{pmatrix} = K^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \cdots \\ \alpha_{i_t} \end{pmatrix}.$$

因而组(Ⅱ)也能用组(Ⅰ)线性表出，即可用组 A 线性表出，而组(Ⅱ)为组 B 的最大无关组，故组 B 可用组 A 线性表出，所以组 A 与组 B 等价．

证明二 因组(Ⅰ)能用组(Ⅱ)线性表出，作两向量组

组(Ⅲ)： $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$

组(Ⅳ)： $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$

易证组(Ⅲ)与组(Ⅳ)等价．等价必等秩，故 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$ 也是组(Ⅳ)的最大无关组，所以 $\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_t}$ 也能用 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_t}$ 线性表出，即能用组 A 线性表出，因而组 B 也能用组 A 线性表出，于是组 A 与组 B 等价．

注意 上例说明秩 $A=$ 秩 B，且组 A 能用组 B 线性表出，这时组 A 才与组 B 等价．仅有等秩这一个条件，组 A 与组 B 不一定等价，例如，组 A：$\alpha_1=[1,0,0,0]$，$\alpha_2=[0,1,0,0]$，组 B：$\beta_1=[0,0,1,0]$，$\beta_2=[0,0,0,1]$．显然有秩 $A=$ 秩 $B=2$，但由于这两组向量不能相互线性表出，因而不等价．

习 题 3.8

1. 设三同型矩阵 $A,B,C=A+B$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3，试证 $r_1+r_2\geqslant r$.

2. s 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，且可由向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出，证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩为 s.

第四章　线性方程组

§4.1　基础解系和特解的简便求法

设非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有解，其中 $A=[a_{ij}]$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{X},\boldsymbol{b}$ 分别为 n,m 维列向量．对增广矩阵 $\overline{A}=[A\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$施行初等行变换，将 A 化成含最高阶单位矩阵 E_r（r 阶单位矩阵）的矩阵．为方便计，设 $AX=\boldsymbol{b}$ 有解且设 $\overline{A}=[A\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$经初等行变换化为

$$\overline{A}_1=[A_1\ \vdots\ \boldsymbol{b}_1]$$

$$=\left[\begin{array}{ccccccc:c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{4.1.1}$$

其中 A_1 为最右端矩阵中虚线左边矩阵，$\boldsymbol{b}_1$ 为虚线右边列向量．

由于经初等行变换后，$AX=\boldsymbol{b}$ 中的多余方程被明显地分离出来（体现在 $\overline{A}_1$ 中出现元素全为 0 的行），致使 $\overline{A}_1=[A_1\ \vdots\ \boldsymbol{b}_1]$有比较简单的形式（例如化为含最高阶单位矩阵的形式）因方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 与 $A_1X=\boldsymbol{b}_1$ 同解，解方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 可归结为解方程组 $A_1X=\boldsymbol{b}_1$，这样就给求解 $AX=\boldsymbol{b}$ 带来极大的方便．

（一）基础解系的简便求法

令 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $AX=\boldsymbol{0}$，由（4.1.1）式知，秩 $A=$ 秩 $A_1=r$，而方程组中未知数个数为 n，故其一个基础解系含 $n-r$ 个解向量，不妨

设为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$. 可按下法根据变换矩阵 A_1 直接写出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$的 n 个分量.

因最高阶单位矩阵 E_r 的 r 个列分别位于 A_1 的第 $1,2,\cdots,r$ 列,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量依次是 E_r 所在列以外的 $n-r$ 个列,即第 $r+1,r+2,\cdots,n$ 列的前 r 个分量反号,于是首先可写出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$的第 $1,2,\cdots,r$ 个分量:

$$\alpha_1=[-c_{1,r+1},-c_{2,r+1},\cdots,-c_{r,r+1},*,*,\cdots,*]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_2=[-c_{1,r+2},-c_{2,r+2},\cdots,-c_{r,r+2},*,*,\cdots,*]^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots,$$
$$\alpha_{n-r}=[-c_{1,n},-c_{2,n},\cdots,-c_{r,n},*,*,\cdots,*]^{\mathrm{T}}.$$

而其余 $n-r$ 个分量依次取成 $n-r$ 阶单位矩阵,于是

$$\alpha_1=[-c_{1,r+1},-c_{2,r+1},\cdots,-c_{r,r+1},1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_2=[-c_{1,r+2},-c_{2,r+2},\cdots,-c_{r,r+2},0,1,\cdots,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\cdots,$$
$$\alpha_{n-r}=[-c_{1,n},-c_{2,n},\cdots,-c_{r,n},0,0,\cdots,1]^{\mathrm{T}}.$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在 A_1 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则基础解系 $n-r$ 个解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$的第 j_1,第 $j_2,\cdots$,第 j_r 个分量依次是除 r 阶单位矩阵所在 r 个列以外的其余 $n-r$ 列的 r 个分量反号,而其余 $n-r$ 个分量依次组成 $n-r$ 阶单位矩阵.

例 1[1996 年 2] 求下列齐次线性方程组的基础解系:

$$\begin{cases}x_1+x_2 \qquad\qquad +x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad =0,\\ \qquad\qquad x_3+x_4+x_5=0.\end{cases}$$

解法一 将其系数矩阵 A 用初等行变换化成含最高阶单位矩阵的矩阵 A_1:

$$A\to A_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix},$$

A_1 中最高阶单位矩阵为 E_3,故秩 $A=$秩 $A_1=r=3$,而 $n=5$,所以

一个基础解系含 $n-r=5-3=2$ 个解向量 α_1 和 α_2. 设

$$\alpha_i=[x_1^{(i)},x_2^{(i)},x_3^{(i)},x_4^{(i)},x_5^{(i)}] \quad (i=1,2).$$

因 E_3 位于 A_1 的第 $j_1=1,j_3=3,j_4=4$ 列，故 α_1,α_2 的第 1,3,4 个分量分别为 A_1 的其余 2 列，即第 2,5 两列的前 3 个分量反号，故

$x_1^{(1)}=-1,x_3^{(1)}=0,x_4^{(1)}=0$，即 $\alpha_1=[-1,x_2^{(1)},0,0,x_5^{(1)}]$；

$x_1^{(2)}=-1,x_3^{(2)}=-1,x_4^{(2)}=0$，即 $\alpha_2=[-1,x_2^{(1)},-1,0,x_5^{(2)}]$.

由 α_1,α_2 的其余各分量 $x_i^{(j)}=(i=2,5;j=1,2)$依次组成 2 阶单位矩阵，即可写出其余各分量：

$$x_2^{(1)}=1,x_5^{(1)}=0;$$
$$x_2^{(2)}=0,x_5^{(2)}=1,$$

故 $\alpha_1=[-1,1,0,0,0]$，$\alpha_2=[-1,0,-1,0,1]$为所求基础解系.

解法二 如把最高阶单位矩阵 E_3 看成是由第 1,2,3 行与第 2,3,4 列所组成，如何写出基础解系的两个向量 β_1,β_2 的分量呢？因 E_3 在第 2,3,4 列，故 β_1,β_2 的第 2,3,4 个分量分别是除 E_3 所在列以外的两个列即第 1 列、第 5 列的前三个数反号，即 $\beta_1=[*,-1,0,0,*]^T$，$\beta_2=[*,-1,-1,0,*]^T$，而其余两分量依次组成 2 阶单位矩阵，故所求的基础解也可为

$$\beta_1=[1,-1,0,0,0]^T, \quad \beta_1=[0,-1,-1,0,1]^T.$$

例 2 求下列齐次线性方程组的基础解系：

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$$

解 将其系数矩阵 A 用初等行变换化成含最高阶单位矩阵的矩阵：

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -7/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A_1 中最高阶单位矩阵为 E_3,因而秩 $A=$ 秩 $A_1=r=3$,又 $n=5$,故一个基础解系含两个解向量 α_1,α_2. 又因 E_3 所在列为 A_1 的第 1,2,5 列,故 α_1,α_2 的第 1,2,5 个分量分别为其余两列即第 3,4 两列的前 3 个分量反号;而 α_1,α_2 的其余分量依次组成 2 阶单位矩阵,故所求的基础解系为

$$\alpha_1=[-1,1,1,0,0],\alpha_2=[7/2,5/2,0,1,3].$$

例 3 矩阵 $B=\begin{bmatrix}1&-2&1&0&0\\1&-2&0&1&0\\0&0&1&-1&0\\1&-2&3&-2&0\end{bmatrix}$ 的各行向量都是方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0,\end{cases}$$

的解向量,问这四个行向量能否构成上方程组的基础解系,若不能,这 4 个行向量是多了,还是少了?若多了,如何去掉,若少了,又如何补充?

解 将上方程组的系数矩阵 A 施行初等行变换化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5\\0&1&2&2&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因 A_1 中最高阶单位矩阵为 E_2,故秩 $A=$ 秩 $A_1=r=2$,而 $n=5$,因而一个基础解系含 $n-r=3$ 个解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

E_2 的两列为 A_1 的第 1,2 两列,故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的第 1,2 两个分量分别为其余 3 列即第 3,4,5 列的前两个分量反号,而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的后 3 个分量依次取成 3 阶单位矩阵,故其基础解系为

$$\alpha_1=[1,-2,1,0,0,],\alpha_2=[1,-2,0,1,0],$$
$$\alpha_3=[5,-6,0,0,1].$$

B 中第 3,4 两行的行向量均是其第 1,2 两行的行向量的线性组合(第 1 行减去第 2 行便是第 3 行,第 1 行的 3 倍减去第 2 行的 2 倍便是第 4 行),因此 B 中个数最多的线性无关的行向量只有两行,例如第 1,2 两行,故 B 中 4 个行向量不能组成基础解系,需增补向量 α_3. 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $n-r=3$ 个线性无关的解向量,故为一基础解系.

例 4[1994 年 1, 2] 设四元齐次线性方程(Ⅰ): $\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0,\end{cases}$ 又已知某齐次线性方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,2,2,1]^{\mathrm{T}}.$$

1)求线性方程组(Ⅰ)的基础解系;

2)问线性方程组(Ⅰ)和(Ⅱ)是否有非零公共解?若有,则求出所有的公共非零解;若没有,则说明理由.

解 1)因组(Ⅰ)的系数矩阵用初等行变换易化为:

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix}.$$

故组(Ⅰ)的基础解系为 $\alpha_1=[0,0,1,0]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[-1,1,0,1]^{\mathrm{T}}$,且其通解为 $k_3\alpha_1+k_4\alpha_2$;

2)因方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)的公共解就是组(Ⅱ)的通解满足组(Ⅰ)的解,如将组(Ⅱ)的通解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}=k_1[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,2,2,1]^{\mathrm{T}}\\&=[-k_2,k_1+2k_2,k_2+2k_2,k_2]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

代入组(Ⅰ),得到

$$\begin{cases}x_1+x_2=-k_2+k_1+2k_2=0.\\x_2-x_4=k_1+2k_2-k_2=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}k_1+k_2=0,\\k_1+k_2=0.\end{cases}$$

解得 $k_1=-k_2$,故组(Ⅰ)与组(Ⅱ)的公共解为

$k_1[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[-1,2,2,1]^{\mathrm{T}}=k_2[-1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$($k_2$ 为任意实数).

所有非零公共解为 $k[-1,1,1,1]$($k\neq0$).

(二)特解的简便求法

在(4.1.1)式中因最高阶单位矩阵 E_r 在 A_1 即 $\overline{A_1}$ 的第 1,2,…,r 列,故特解 η_0 的第 1,2,…,r 个分量为$\overline{A_1}$中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取零,于是特解 η_0 为

$$\eta_0=[d_1,d_2,\cdots,d_r,0,\cdots,0].$$

一般,如果 r 阶(最高阶)单位矩阵在$\overline{A_1}$的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 列,则特解 η_0 的第 $j_1,j_2,\cdots,j_r$ 个分量依次为$\overline{A_1}$中最后一列的前 r 个分量(但不反号),其余 $n-r$ 个分量全部取成零元素.

例 5 求下列方程组的通解:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5;\\ x_1-\ x_2+\ x_3+\ x_4=1.\end{cases}$$

解 对其增广矩阵$\overline{A}$施行初等行变换,化成含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\overline{A_1}=[A_1 \vdots b_1]=\left[\begin{array}{cccc:c}1 & -2 & 1/3 & 0 & -1/3\\ 0 & 1 & 2/3 & 1 & 4/3\end{array}\right].$$

注意到最高阶单位矩阵 E_2 在$\overline{A_1}$的第 1,4 两列,特解 η_0 的第 1,4 两个分量依次为$\overline{A_1}$中最后一列的两个分量$-1/3$,4/3(注意,不反号),其余分量取 0,于是 $\eta_0=[-1/3,0,0,4/3]$.

对应的齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha_1=[2,1,0,-1],\alpha_2=[-1/3,0,1,-2/3],$$

其通解为 $\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$($k_1,k_2$ 为任意常数).

例 6[3.7(3)] 求解下列非齐次线性方程组:

$$\begin{cases}2x+y-z+w=1,\\ 4x+2y-2z+w=2,\\ 2x+y-z-w=1.\end{cases}$$

解 用初等行变换将其增广矩阵化为含最高阶单位矩阵的矩阵:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & -2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2(-1)]{r_1(-1)}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1+r_2}\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\overline{A}_1$$

由 $\overline{A}_1$ 知，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=2<n=5$，一个基础解系含两个解向量 α_1，α_2. 注意到 $\overline{A}_1$ 中的最高阶单位矩阵 E_2 在第 3,4 两列，则

$$\alpha_1=[1,0,2,0]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}},\eta_0=[0,0,-1,0]^{\mathrm{T}}(\text{特解}),$$

故其通解为 $\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta_0(k_1,k_2$ 为任意常数).

习　　题 4.1

1. 按本节所述简便方法求下方程组的通解：

(1)[3.7(2)] $\begin{cases}2x+3y+z=4,\\ x-2y+4z=-5,\\ 3x+8y-2z=13,\\ 4x-y+9z=-6.\end{cases}$

(2)[1987 年 4] $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4;\\ x_1\qquad\;\;+x_3-\;x_4=-3;\\ 3x_1+\;x_2+\;x_3\qquad\;\;=1;\\ 7x_1\qquad\;\;+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$

2. (1)[4.17(3)] 方程组 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=0$ 是否有非零解？如果有，试求一个基础解系；

(2)求方程组 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+nx_n=1$ 的全部解.

§4.2　基础解系的证法

下面介绍基础解系的证法.

证法一　根据定义证之. 即证一组向量为线性无关的解向

量，且任一解向量都可由它线性表出．

例 1 证明与基础解系等价的线性无关向量组是基础解系．

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是某方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，又设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 等价的向量组(等价的两向量组可以包含不同个数的向量)．因 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关，从而这两个向量组是等价的线性无关向量组，所含向量个数必相等，于是 $m=t$.

(1)$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 中每个向量均可写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合，而齐次线性方程组解的线性组合仍是该方程组的解，故 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都是 $AX=0$ 的解向量；

(2)因 $AX=0$ 的任一解向量均可写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 的线性组合，而每个 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$ 又可写成 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的线性组合，故 $AX=0$ 的任一解均可写成 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的线性组合；

(3)由题设知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 线性无关．

由定义，知 $\beta_2,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 $AX=0$ 的基础解系．证毕．

注意 基础解系尽管不唯一，上例说明它们等价．

证法二 证线性无关的向量组与基础解系等价．

例 2[1994 年 5] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是某齐次线性方程组的基础解系，试证 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$，也是它的基础解系．

证 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 中每个向量显然都是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．反之，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 中每个向量也是 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 的线性组合．事实上，

$$\alpha_1=(1/2)(\alpha_1+\alpha_2)+(1/2)(\alpha_1+\alpha_3)-(1/2)(\alpha_2+\alpha_3),$$

$$\alpha_2=(1/2)(\alpha_1+\alpha_2)+(1/2)(\alpha_2+\alpha_3)-(1/2)(\alpha_3+\alpha_1),$$

$$\alpha_3=(1/2)(\alpha_1+\alpha_3)+(1/2)(\alpha_3+\alpha_2)-(1/2)(\alpha_1+\alpha_2).$$

因而两向量组等价；又因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，易证 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关，故由上例知 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 是一基础解系．证毕．

如果一向量组与基础解系等价，则它们必等秩；又如果它们所

含向量个数相等，则该向量组必线性无关，于是得到基础解系的另一证法．

证法三　证向量组与基础解系等价，且所含向量个数相等．

例 3　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是齐次线性方程组的基础解系，向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 满足 $\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j(i=1,2,\cdots,r)$．如果组合系数矩阵 $[a_{ij}]$ 的行列式 $D=|a_{ij}|$ 不等于零，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为该方程组的基础解系．

证　因 $D=|a_{ij}|\neq 0,\beta_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\alpha_j$，根据克莱姆法则，知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 中每个向量均可写成 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性组合，因而两向量组等价，且它们所含向量个数均等于 r．因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为一基础解系，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 也为一基础解系．

证法四　设 n 个未知数的齐次线性方程组，其系数矩阵的秩为 r，欲证向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 为一基础解系，只须证它们是线性无关的解向量且 $t=n-r$．简言之，只须证 $n-r$ 个解向量线性无关(见 § 3.2 例 8)．

此法的优点在于对一定个数($n-r$ 个)解向量，不必证任意解向量由它们线性表出，只须证它们线性无关，就能断定它们为一个基础解系．此法应用方便，经常用．

例 4　设 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量，A 的秩为 r，证明

$$\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-r}-\alpha_0$$

是对应的齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．

证　所给向量组为 $n-r$ 个向量，如能证明它们均是 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解向量，且线性无关，则它们为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系．因

$$A\alpha_0=\boldsymbol{b},A\alpha_1=\boldsymbol{b},\cdots,A\alpha_{n-r}=\boldsymbol{b},$$

故　$A(\alpha_i-\alpha_0)=A\alpha_i-A\alpha_0=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}(i=1,2,\cdots,n-r)$．

即 $\alpha_i-\alpha_0$ 为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解向量．下证它们线性无关．

设 $k_1(\alpha_1-\alpha_0)+k_2(\alpha_2-\alpha_0)+\cdots+k_{n-r}(\alpha_{n-r}-\alpha_0)=0.$

即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}+(-k_1-k_1-\cdots-k_{n-r})\alpha_0=0.$

因 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关，故 $k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0$，即 $\alpha_1-\alpha_0,\alpha_2-\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-r}-\alpha_0$ 线性无关.

例 5 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+ & a_{12}x_2+ & \cdots+ & a_{1n}x_n= & 0;\\ \cdots \\ a_{n1}x_1+ & a_{n2}x_2+ & \cdots+ & a_{nn}x_n= & 0.\end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A|=0$，而 A 中某一元素 a_{ki} 的代数余子式 $A_{ki}\neq0$，证明 $[A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}]$ 构成这个齐次线性方程组的一个基础解系.

证 $|A|=0,A_{ki}\neq0$，故秩 $A=n-1$，因而上方程组的基础解系只含一个解向量. 由

$$a_{j1}A_{k1}+a_{j2}A_{k2}+\cdots+a_{jn}A_{kn}=\begin{cases}0, & j\neq k;\\ |A|=0, & j=k\end{cases}$$

可知 $[A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}]$ 为上方程组的解. 又因 $A_{ki}\neq0$，此解为非零解向量，线性无关，故 $[A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}]$ 为方程组的基础解系.

例 6[1998 年 1] 已知线性方程组(Ⅰ):

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0,\end{cases}$$

的一个基础解系为 $[b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n}]^T,[b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n}]^T,[b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n}]^T$，试写出下列线性方程组(Ⅱ)的通解，并说明理由：

$$(\text{Ⅱ})\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\ \cdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0.\end{cases}$$

解 为求组(Ⅱ)的通解，关键在于求出其一个基础解系，令

$\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i,2n}]^{\mathrm{T}},\beta_i=[b_{i1},b_{in},\cdots,b_{i,2n}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$.
又设组(Ⅰ)、组(Ⅱ)的系数矩阵分别为 A,B,则

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},\text{因而 } A^{\mathrm{T}}=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n],B^{\mathrm{T}}=[\beta_1,\cdots,\beta_n].$$

因 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 为组(Ⅰ)的解向量,故 $A[\beta_1,\cdots,\beta_n]=O$,即 $AB^{\mathrm{T}}=O$.
因而

$$(AB^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=BA^{\mathrm{T}}=B[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]=O.$$

故 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为组(Ⅱ)的解向量.因组(Ⅰ)的一个基础解系含 n 个解向量,未知数个数为 $2n$,故其系数矩阵 A 的秩必为 $2n-n=n$.因而 A 的 n 个行向量 $\alpha_1^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_n^{\mathrm{T}}$,即 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

下证组(Ⅱ)的一个基础解含 n 个解向量.事实上,因秩 $B=$秩$(B^{\mathrm{T}})=$秩$[\beta_1,\cdots,\beta_n]=n$,组(Ⅱ)的未知数个数为 $2n$,故一个基础解系含 $2n-n=n$ 个解向量,而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 恰为组(Ⅱ)的 n 个线性无关的解向量,由证法四知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为组(Ⅱ)的一个基础解系,从而得到所求的通解为

$$\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n(k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 为任意常数}).$$

例 7[选择题] 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系,则该方程组的基础解系还可以表成______.

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个等价向量组

(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个等秩向量组

(C)$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

(D)$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

解 因与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的向量组不一定线性无关,且所含向量的个数不一定是 3,故(A)不能入选;与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等秩的向量组所含向量的个数不一定等于 3,故(B)也不能入选;(D)中向量线性相关.事实上

$$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_2-\alpha_3+\alpha_3-\alpha_1=\mathbf{0},$$

故(D)也不能入选.因而(C)入选,事实上 3 个向量 $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1$

$+\alpha_2+\alpha_3$组成的向量组易证线性无关.

习　题　4.2

1. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为齐次线性方程组的基础解系,试证$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$也是该齐次线性方程组的基础解系.

2. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$是齐次线性方程组的一个基础解系,证明$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_t,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_t,\beta_t=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{t-1}$也是该方程组的基础解系.

3. 设齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$,其中A为$(n-1)\times n$矩阵,M_i为A中划去第i列的$n-1$阶子式,证明:如果秩$A=n-1$,则$\alpha=[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n]$是该方程组的一个基础解系.

4.[选择题]　设A为n阶方阵,秩$A=n-3$,且$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$AX=\mathbf{0}$的三个线性无关的解向量,则(　　)为$AX=\mathbf{0}$的基础解系.

(A)$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　(B)$\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$

(C)$2\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3/2-\alpha_2,\alpha_1-\alpha_3$　(D)$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2,-\alpha_1-2\alpha_3$

§4.3　线性方程组有解的证法

(一)非齐次线性方程组$AX=b$有解(相容)的证法

常证秩$A=$秩$\overline{A}$,其中$\overline{A}=[A\ \vdots\ \boldsymbol{b}]$;或证向量$\boldsymbol{b}$是$A$的列向量的线性组合.

设秩$A=$秩$\overline{A}=r$,则

(1)当$r=n$(未知数个数,即X的维数)时,$AX=\boldsymbol{b}$有唯一解;

(2)当$r<n$(未知数个数,即X的维数)时,$AX=\boldsymbol{b}$有无穷多组解.

如果$\overline{A}$的元素是数字或是数字和文字,用初等行变换证秩A

$=$秩 $\overline{A}$ 比较方便；如果 $\overline{A}$ 是抽象矩阵或其元素是文字，常用矩阵秩的理论证明秩 $A=$秩 $\overline{A}$.

例 1[1997 年 4][选择题]　非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 中未知数个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则______.

(A)$r=m$ 时，方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有解

(B)$r=n$ 时，方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(C)$m=n$ 时，方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(D)$r<n$ 时，方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解

解　当秩 $A=r=m$ 时，则 A 中至少有一个 m 阶子式不等于零，且必有 $n\geqslant m$. 如 $n=m$，将 A 中 m 个线性无关的行向量都增加一个分量($\boldsymbol{b}$ 的分量)得到的 $\overline{A}$ 中 m 个行向量必线性无关(命题 3.5.2). 同理当 $n>m$ 时，都增加 $n+1-m$ 个分量后得到的 $\overline{A}$ 中 m 个行向量也必线性无关. 故无论 $n=m$ 或 $n>m$ 都有秩 $A=$秩 $\overline{A}$，因而 $AX=\boldsymbol{b}$ 有解. 而(B)，(C)，(D)都不能保证秩 $A=$秩 $\overline{A}$，故 $AX=\boldsymbol{b}$ 不一定有解. 因而(A)入选.

例 2[选择题]　n 元线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是(　　).

(A)秩 $\overline{A}=n$　　(B)A 为方阵且 $|A|\neq 0$　　(C)秩 $A=n$

(D)秩 $A=n$，且 b 为 A 的列向量组的线性组合

解　(A)，(B)，(C)中都没有给出秩 $A=$秩 $\overline{A}$ 的条件，因而 $AX=\boldsymbol{b}$ 不一定有解，而(D)中由于 $\boldsymbol{b}$ 为 A 的列向量的线性组合，秩 $\overline{A}=$秩 $A=r=n$. 只有(D)入选.

例 3　试证方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_3+4x_4=a+2c; \\ 2x_1+2x_2+4x_3+8x_4=2a+b; \\ -x_1-2x_2+x_3+2x_4=-a-b+c; \\ 2x_1+7x_3+14x_4=3a+b+2c-d \end{cases}$$

有解的充要条件是 $a+b-c-d=0$.

解 $\overline{A}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&2&4&a+2c\\0&2&0&0&b-4c\\0&0&3&6&-c\\0&0&0&0&a+b-c-d\end{bmatrix}$.

因而秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$ 的充要条件是 $a+b-c-d=0$,故原方程组有解的充要条件为 $a+b-c-d=0$.

例 4 试证方程组

$$x_1-x_2=a_1,\qquad x_2-x_3=a_2,\qquad x_3-x_4=a_3,$$
$$x_4-x_5=a_4,\qquad x_5-x_1=a_5.$$

有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$,且在有解的情况下,求出它的一般解.

解 $\overline{A}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\left[\begin{array}{ccccc:c}1&0&0&0&-1&a_1+a_2+a_3+a_4\\0&1&0&0&-1&a_2+a_3+a_4\\0&0&1&0&-1&a_3+a_4\\0&0&0&1&-1&a_4\\0&0&0&0&0&a_1+a_2+a_3+a_4+a_5\end{array}\right]$

$=\overline{A_1}$.

当且仅当 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$ 时,秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=4$,故所给方程组有解的充要条件是 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$. 由 $\overline{A_1}$ 得(参阅§4.1)原方程组的一特解:

$$\eta_0=[a_1+a_2+a_3+a_4,a_2+a_3+a_4,a_3+a_4,a_4,0],$$

和对应的齐次线性方程组的基础解系为 $\alpha_1=[1,1,1,1,1]$,故原方程组的一般解为

$$\eta=\eta_0+k\alpha\quad(k\text{ 为任意常数}).$$

例 5 假设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

的系数矩阵的秩等于矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & 0 \end{bmatrix}$$

的秩，试证该方程组有解．

证 令 $A=[a_{ij}]$，$\overline{A}=[A \vdots \boldsymbol{b}]$，又设 $C=\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{b}=[b_1,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}$，因矩阵增加一行(列)向量，其秩不变或增加 1，但绝不可能减小；矩阵减少一行(列)向量，其秩不变或减小 1，但绝不可能增大，故

$$秩\ A \leqslant 秩\ \overline{A} \leqslant 秩\ C.$$

由题设，秩 $A=$ 秩 C，故秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$，原方程组有解．

例 6 已知非齐次线性方程组

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

的系数矩阵的行列式 D 及 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 均为零，其中 D_j 是由 D 的第 j 列换成常数项所得，问此方程组是否有解？

解 因 $D=0$，由克莱姆法则知，如果方程组有解，决不会只有一解．但到底是否有解，须考察其系数矩阵 $\overline{A}$ 和增广矩阵 A 的秩的大小关系．因

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

中包含第 $n+1$ 列的 n 阶行列式共有 n 个，它们分别与 $D_1,D_2,\cdots,D_n$ 最多相差一个负号，而 $D_j=0$，故它们全都为零；此外 $\overline{A}$ 中还有一个不包含第 $n+1$ 列的 n 阶子式 D，而 $D=0$，故 $\overline{A}$ 中所有 n 阶子

式(共有 $n+1$)都等于零,从而秩 $\overline{A}<n$;因 $D=0$,秩 $A<n$. 虽 A 和 $\overline{A}$ 的秩都小于 n,但并不能保证秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$. 事实上,有可能秩 $\overline{A}>$ 秩 A,因而原方程组无解,例如,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; & \text{虽 } D=D_1=D_2=D_3=0, \\ 3x_1+3x_2+3x_3=3; \Rightarrow & \text{但秩 } A=1<\text{秩 } \overline{A}=2, \\ 5x_1+5x_2+5x_3=0. & \text{该方程组无解}. \end{cases}$$

当然也可能秩 $\overline{A}=$ 秩 A,因而原方程有解. 例如,

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1; & D=D_1=D_2=D_3=0, \\ 3x_1+3x_2+3x_3=3; \Rightarrow & \text{秩 } A=1=\text{秩 } \overline{A}<n=3, \\ 5x_1+5x_2+5x_3=5. & \text{该方程组有无穷多组解}. \end{cases}$$

例 7 A 为 n 阶方阵,$|A|\neq 0$,试证对任意 n 维向量 b,方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 有解.

证 下面简述三条证题思路,五种证法.

(Ⅰ) 证秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$,其中 $\overline{A}=[A \vdots \boldsymbol{b}]$,有以下两法:

法(i) 因秩 $A=n$(A 的行数),故 A 的 n 个行向量线性无关,$\overline{A}$ 的 n 个行向量是 A 的 n 个行向量在相同位置上添上一个分量所组成,由 §3.5 例 4 知,$\overline{A}$ 的 n 个行向量线性无关,故秩 $\overline{A}=n$. 所以秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$.

法(ii) 秩 $\overline{A}\geqslant$ 秩 $A=n$,又 $\overline{A}$ 为 $n\times(n+1)$ 矩阵,故秩 $\overline{A}\leqslant n$,从而有秩 $\overline{A}=n=$ 秩 A.

(Ⅱ)证向量 $\boldsymbol{b}$ 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出,其中 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 A 的 n 个列向量.

法(iii) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 n 维列向量,且线性无关,故 $\boldsymbol{b},\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 必线性相关(任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关). 由命题 3.1.2 知,$\boldsymbol{b}$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

法(iv) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,为 n 维线性空间一组基,$\boldsymbol{b}$ 为 n 维向量,故可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出.

(Ⅲ) 由克莱姆法则证之.

因$|A|\neq 0$,由克莱姆法则知,$AX=b$有唯一解.

例 8 设$AX=b$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4\\0&5&0\\1&3&2\end{bmatrix},$$

试写出使方程组$AX=b$有解的所有列向量b.

解 因$AX=b$有解,故b为A的列向量组的线性组合,所求的所有列向量b为

$b^{T}=k_1[1,0,1]^{T}+k_2[3,5,3]^{T}+k_3[4,0,2]^{T}$($k_1,k_2,k_3$为任意实数).

例 9 设A是$m\times n$矩阵,B是$m\times p$矩阵,

(1) 给出方程$AX=B$有解的充要条件,并证明.

(2) 给出上方程有唯一解的充要条件,并证明.

证(1) X为$n\times p$矩阵,设$X=[X_1,X_2,\cdots,X_p]$,其中X_i为n维列向量($i=1,2,\cdots,p$),令$B=[B_1,B_2,\cdots,B_p]$,则

$$AX=[AX_1,AX_2,\cdots,AX_n]=[B_1,B_2,\cdots,B_n].$$

$AX=B$有解$\leftrightarrow AX_i=B_i(i=1,2,\cdots,p)$有解

$\leftrightarrow$秩$A=$秩$[A,B_i](i=1,2,\cdots,p)$

$\leftrightarrow$秩$A=$秩$[A,B]$.

(2) $AX=B$解唯一$\leftrightarrow AX_i=B_i(i=1,2,\cdots,p)$解唯一

$\leftrightarrow$秩$A=n$(X_i的维数)(未知数个数)

$\leftrightarrow$秩$A=$秩$[A,B]=n$(未知数个数).

注意 上例结论可直接引用(参阅习题 4.3 第 8 题)

例 10[1997 年 1] 设$\alpha_1=[a_1,a_2,a_2]^{T}$,$\alpha_2=[b_1,b_2,b_3]^{T}$,$\alpha_3=[c_1,c_2,c_3]^{T}$,则三条直线

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\a_2x+b_2y+c_2=0,\\a_3y+b_3y+c_3=0.\end{cases}$$

(其中$a_i^2+b_i^2\neq 0,i=1,2,3$)交于一点的充要条件是____.

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关　　(B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

(C)秩$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=$秩$[\alpha_1,\alpha_2]$

(D)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,$\alpha_1,\alpha_2$线性无关

解 三条直线只有一交点,即相当三条直线方程所组成的线性方程组有唯一解,而该方程组有唯一解的充分必要条件是

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2]\text{与}\ \overline{A}=\begin{bmatrix}a_1 & b_1 & -c_1\\ a_2 & b_2 & -c_2\\ a_3 & b_3 & -c_3\end{bmatrix}=[\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3]$$

有相同的秩r,且$r=n=2$,但$[\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3]$与$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$有相同的秩,这样得到

$$\text{三直线交于一点}\leftrightarrow\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2]=\text{秩}[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=2.$$

即$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关,而$\alpha_1,\alpha_2$线性无关,故(D)入选.

(二) 齐次线性方程组$AX=0$有解的证法

欲证齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$有非零解,可证A的秩小于列向量X的维数;或证A的列向量组线性相关;或证方程个数小于未知个数;特别,欲证方程个数与未知数个数相等的齐次线性方程组有非零解,只须证$|A|=0$.

欲证$AX=\mathbf{0}$只有零解,或证A的秩与X的维数(未知数个数)相等,或证A的列向量组线性无关. 特别,欲证方程个数与未知数个数相等的齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$只有零解,只须证$|A|\neq 0$.

例 11 设A为$m\times n$矩阵,且$m<n$,则$AX=\mathbf{0}$有非零解.

证明一 因A为$m\times n$矩阵,X的维数为n,$m<n$,故秩$A\leqslant m<n=X$的维数(未知数个数),于是$AX=\mathbf{0}$有非零解.

证明二 因秩$A<n$,A的n个列向量线性相关,故$AX=\mathbf{0}$有非零解.

证明三 $AX=\mathbf{0}$是含m个方程、n个未知数的齐次方程组,因$m<n$,即方程个数小于未知数个数,故有非零解.

注意 上例说明齐次线性方程组如其方程个数小于未知数个

数，必有无穷多组解．

例 12[1992 年 4][选择题] 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 仅有零解的充分条件是______．

(A) A 的列向量组线性无关　　(B) A 的列向量组线性相关

(C) A 的行向量组线性无关　　(B) A 的行向量组线性相关

解 当 A 的列向量组线性无关时，$AX=\mathbf{0}$ 仅有零解，故(A)入选．

例 13[选择题] 齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是____．

(A) A 的任意两个列向量线性相关

(B) A 的任意两个列向量线性无关

(C) A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合

(D) A 中任一列向量都是其余列向量的线性组合

解 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是 A 的列向量组线性相关，即 A 中必有一列向量是其余列向量的线性组合，故(C)入选．

例 14 设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$. 用线性方程组理论证明，如 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同根，则 $f(x)$ 是零多项式．

证 设 $f(x)$ 的 $n+1$ 个不同的根为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，则方程

$$\begin{cases} c_0+c_1x_1+c_2x_1^2+\cdots+c_nx_1^n=f(x_1)=0; \\ \cdots \\ c_0+c_1x_{n+1}+c_2x_{n+1}^2+\cdots+c_nx_{n+1}^n=f(x_{n+1})=0, \end{cases}$$

是含$n+1$个未知数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 的齐次线性方程组．因其系数矩阵 A 的行列式 $|A|$ 为 $n+1$ 阶范德蒙行列式，由 $x_i\neq x_j\ (i\neq j)$，得到 $|A|\neq 0$，故上方程组只有零解，即 $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$，于是 $f(x)$ 为零多项式．

例 15 设 n 阶矩阵 A 的 n 个列向量为

$$\alpha_i=[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}]^{\mathrm{T}}\ (i=1,2,\cdots,n).$$

n 阶矩阵 B 的 n 个列向量为

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1,$$

试问当秩 $A=n$ 时，齐次线性方程组 $BX=\mathbf{0}$ 是否有非零解？并证明你的结论．

解 易知 $B=AK^{\mathrm{T}}$[该式为(3.6.1)式的转置]，其中

$$K^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&1\\1&1&0&\cdots&0&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&1&0\\0&0&0&\cdots&0&1&1\end{bmatrix},|K|^{\mathrm{T}}=1+(-1)^{n-1}.$$

(1)当 n 为奇数时，$|K^{\mathrm{T}}|\neq0$，K^{T} 为满秩矩阵，因而有

$$秩(AK^{\mathrm{T}})=秩A=秩B=n(未知数个数),$$

故 $BX=\mathbf{0}$ 只有零解．

(2)当 n 为偶数时，$|K^{\mathrm{T}}|=0$，从而 $|B|=|AK^{\mathrm{T}}|=|A||K^{\mathrm{T}}|=0$，故秩 $B<n$，于是 $BX=\mathbf{0}$ 有非零解．

(三)与两线性方程组(3.5.6)，(3.5.7)

有关的线性方程组有解的证法．

其证法是灵活应用§3.5例12及下例的结论．

例16 证明方程组

$$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1;\\\cdots\\a_{m,1}y_1+a_{m,2}y_2+\cdots+a_{m,n}y_n=b_m,\end{cases}\tag{4.3.1}$$

有解的充要条件是方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0;\\\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0,\end{cases}\tag{4.3.2}$$

的解全是下列方程组的解：

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=0.\tag{4.3.3}$$

证 由§3.5例12知，(4.3.2)的解全是(4.3.3)的解

$\leftrightarrow \boldsymbol{b}=[b_1,\cdots,b_m]$是$\alpha_i=[a_{1i},\cdots,a_{mi}]$的线性组合

$\leftrightarrow$存在 $k_1,\cdots,k_n$,使 $\boldsymbol{b}=k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + k_n \begin{bmatrix} a_{1,n} \\ \cdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix}$$

$\leftrightarrow$方程组(4.3.1)有解.

例 17 设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0; \\ \cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0, \end{cases} \tag{4.3.4}$$

$$\begin{cases} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0; \\ \cdots \\ b_{t1}x_1+b_{t2}x_2+\cdots+b_{tn}x_n=0. \end{cases} \tag{4.3.5}$$

证明(4.3.4)的解为(4.3.5)的解的充要条件是向量组

$$\beta_i=[b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}](i=1,2,\cdots,t) \tag{4.3.6}$$

可由下面向量组线性表出:

$$\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,s). \tag{4.3.7}$$

证 将(4.3.5)中 t 个方程分别与方程组(4.3.4)联立. 因(4.3.4)的解为(4.3.5)的解,当然也是

$$b_{11}x_1+b_{12}x_2+\cdots+b_{1n}x_n=0$$

的解,由§3.5 例 12 知,$\beta_1=[b_{11},b_{12},\cdots,b_{1n}]$为

$$\alpha_1=[a_{12},a_{12},\cdots,a_{1n}],\cdots,\alpha_s=[a_{s1},a_{s2},\cdots,a_{sn}]$$

的线性组合. 同理可证 $\beta_2,\cdots,\beta_t$ 也是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合,即向量组(4.3.6)可由向量组(4.3.7)线性表出.

例 18 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1; \\ \cdots \\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=b_r \end{cases} \tag{4.3.8}$$

有解的充要条件是齐次线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{r1}y_r=0; \\
\cdots \\
a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{rn}y_r=0
\end{cases}
\tag{4.3.9}
$$

的每组解 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 均满足

$$c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_rb_r=0.$$

证 注意到(4.3.1)与(4.3.2)的系数矩阵互为转置矩阵，而(4.3.8)与(4.3.9)的系数矩阵也互为转置矩阵，于是由本节例 16 的结论知，方程组(4.3.8)有解的充要条件是(4.3.9)的解全是

$$b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_ry_r=0$$

的解，故(4.3.9)的每组解 $c_1,c_2,\cdots,c_r$ 必满足

$$b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_rc_r=0.$$

例 19 设有两个线性方程组如下：

$$
\begin{cases}
a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1; \\
\cdots \\
a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m;
\end{cases}
\tag{4.3.10}
$$

$$
(4.3.12)\begin{cases}
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0; \\
\cdots \\
a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0;
\end{array}\right\}(4.3.11) \\
b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1,
\end{cases}
$$

证明方程组(4.3.10)有解的充要条件是(4.3.12)无解 .

证明一 注意到(4.3.10)与(4.3.11)的系数矩阵互为转置关系，利用本节例 16 的结论，得到

(4.3.10)有解$\leftrightarrow$(4.3.11)的解全是 $b_1x_1+\cdots+b_mx_m=0$ 的解

$\leftrightarrow$(4.3.11)的解不是(4.3.12)的解

$\leftrightarrow$(4.3.12)无解 .

证二 设 $\boldsymbol{b}=[b_1,\cdots,b_m]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_i=[a_{1i},\cdots,a_{mi}]^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$

(4.3.10)有解$\leftrightarrow\boldsymbol{b}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$

$\leftrightarrow b_i=k_1a_{i1}+k_2a_{i2}+\cdots+k_na_{in}(i=,1,2,\cdots,m)$

$$\leftrightarrow \text{秩}\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} & 0 \\ b_1 & \cdots & b_m & 1 \end{bmatrix} \neq \text{秩}\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{m,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & \cdots & a_{m,n} \\ b_1 & \cdots & b_m \end{bmatrix}$$

$\leftrightarrow$(4.3.12)无解.

习　　题 4.3

1. 设 $x_1-x_2=a, x_2-x_3=2a, x_3-x_4=3a, x_4-x_1=1$.

(1)证明上方程组有解的充要条件为 $a=-1/6$;

(2)有解时,求它的一般解.

2.[1990 年 4,5]　若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1, \\ x_2+x_3=a_2, \\ x_3+x_4=-a_3, \\ x_4+x_1=a_4, \end{cases}$$

有解,则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足什么条件?

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,试判断下列命题是否正确:

(1)若秩 $A<m$(方程个数,即 A 的行数),则齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解.

(2)若秩 $A=m$,则齐次方程组 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解.

(3)若 $m<n$,则非齐次方程组 $AX=b$ 必有无穷多解.

(4)若 $m\geqslant n$,则非齐次方程组 $AX=b$ 要么无解,要么有唯一解,两者必居其一.

4. 设 A 是 n 阶方阵,秩 A+秩$(A-E)=n$,E 为 n 阶单位阵,$A\neq E$,证明 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解.

5. 判断下列齐次线性方程组是否有非零解?

$$\begin{cases} x_2+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0; \\ x_1+x_3+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0; \\ x_1+x_2+x_4+\cdots+x_{n-1}+x_n=0; \\ \cdots \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_n=0; \\ x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{n-2}+x_{n-1}=0. \end{cases} \tag{4.3.13}$$

6. 如果 $\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n]$是线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ \cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}\tag{4.3.14}$$

的系数矩阵的行向量

$$\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,s)$$

的线性组合,则(4.3.14)的解都是下列方程组的解

$$b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0.$$

7. 设线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1;\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

有唯一解,试分别讨论下列两方程组的解:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{n-1,1}x_{n-1}=a_{n,1};\\ \cdots\\ a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_{n-1}=a_{n,n}\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_{n-1}x_{n-1}=b_n.\end{cases}\tag{4.3.15}$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ \cdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,n}x_n=0.\end{cases}\tag{4.3.16}$$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&4\\1&-2\\-2&-2\end{bmatrix}$. 如果矩阵方程 $AX=B$ 有解,试分别就解不唯一与唯一确定参数 a.

§4.4 含参数的线性方程组解法

未知数的系数和(或)常数项含有参数的线性方程组简称为含参数的线性方程组.

求解含参数的线性方程组涉及线性代数很多重要内容. 熟练掌握其解法能体现对这些内容的掌握和应用程度,因此它是历届

考研的重要内容之一.

因参数各种不同取值直接影响该方程组是否有解,有多少个解,因而解含参数的线性方程组必须对参数取值加以讨论. 讨论的具体内容是

(Ⅰ)参数取哪些值时,使秩 $A\neq$ 秩 $\overline{A}$,从而使方程组无解;

(Ⅱ)参数取哪些值时,使秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$,因而使方程组有解,在有解的情况下,进一步还应讨论:

(i)参数取哪些值时,使秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=r<n$,因而使方程组有无穷多解;

(ii)参数取哪些值时,使秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=r=n$,因而使方程组有唯一解.

含参数的线性方程组有三种常见类型,下面分别举例说明其解法,其中 A 和 $\overline{A}$ 分别表示线性方程组的系数矩阵和增广矩阵,n 为方程组所含未知数的个数.

(一)方程个数与未知数个数不等的线性方程组,只能用初等行变换解之.

先将 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵,然后对参数的取值加以讨论.

例 1[1995 年 2] 设

$$\begin{cases}x_1+3x_2+2x_3+\ x_4=1;\\ \qquad\quad x_2+ax_3-ax_4=-1;\\ x_1+2x_2\qquad\qquad +3x_4=3.\end{cases}$$

问 a 为何值时,该方程组有解? 并在有解时求出方程组的通解.

解 用初等行变换将增广矩阵 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵

$$\overline{A}\longrightarrow\left(\begin{array}{cccc:c}1 & 3 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & a-2 & 2-a & 1\end{array}\right)=\overline{A}_1.$$

显然当 $a\neq 2$ 时,秩 $\overline{A}=$ 秩 $\overline{A}_1=3=$ 秩 $A<n=4$,故上方程组有解,且有无穷多组解.

当 $a\neq 2$ 时，用初等行变换，$\overline{A}_1$ 进一步可化为

$$\overline{A}_1=\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3&(7a-10)/(a-2)\\0&1&0&0&(2-2a)/(a-2)\\0&0&1&-1&1/(a-2)\end{array}\right].$$

由基础解系和特解的简便求法，即得基础解系和特解分别为

$\alpha_1=[-3,0,1,1]^T$；

$\eta_0=[(7a-10)/(a-2),(2-2a)/(a-2),1/(a-2),0]^T$.

所求通解为

$$\eta=k\alpha_1+\eta_0(k\text{ 为任意常数}).$$

(二)方程个数与未知数个数相等的方程组用下述两法解之.

法一 初等行变换法(其方法与步骤与(一)相同)

例 2[1987 年 1] 问 a,b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\ x_2+2x_3+2x_4=1,\\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1,\end{cases}$$

有唯一解，无解，有无穷多解？并求出有无穷解时的通解.

解 对增广矩阵进行初等行变换化为行阶梯形矩阵：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&a-3&-2&b\\3&2&1&a&-1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&a-1&0&b+1\\0&0&0&a-1&0\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

(1)$a-1\neq 0$ 即 $a\neq 1$ 时，$r=$秩 $\overline{A}=$秩 $A=4=n$，原方程组有唯一解.

(2)$a-1=0$，且 $b+1=0$ 即 $a=1$ 且 $b=-1$ 时，秩 $\overline{A}=$秩 $A=2<n=4$ 原方程组有无穷多解，将 $a=1,b=-1$ 代入 $\overline{A}_1$ 中，并将其化为含最高阶单位矩阵的矩阵：

$$\overline{A}_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-1\\0&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

则其对应的齐次线性方程组的基础解系和一特解分别为

$$\alpha_1=[1,-2,1,0]^T,\alpha_2=[1,-2,0,1]^T,\eta_0=[-1,1,0,0]^T.$$

故其通解为 $\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta_0$，其中 k_1,k_2 为任意实数．

(3)当 $a-1=0$，但 $b+1\neq0$，即 $a=1$，但 $b\neq-1$ 时，秩 $\overline{A}=3>$秩 $A=2$，原方程组无解．

注意　为讨论两参数的取值对方程组解的影响，常在一参数取确定值(如上例 $a=1$)的条件下，讨论另一参数(如上例参数 b)的取值对方程组解的影响．

例 3[1988 年 4,5]　已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+3x_4=1;\\x_1+3x_2+6x_3+x_4=3;\\3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3;\\x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2.\end{cases}$$

问 k_1 和 k_2 各取何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷多解？在方程组有无穷多解的情况下，试求一般解．

解　$$\overline{A}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&1&2&3&1\\0&1&2&-1&1\\0&0&2-k_1&2&4\\0&0&0&3&k_2+5\end{bmatrix}=\overline{A}_1$$

(1)当 $k_1\neq2$ 时，秩 $A=$秩 $\overline{A}=4$，方程组有唯一解；

(2)当 $k_1=2$ 时，对 $\overline{A}_1$ 继续进行初等行变换，得到

$$\overline{A}_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_2-1 \end{bmatrix} = \overline{A}_2.$$

(a)若 $k_1=2$ 且 $k_2\neq 1$，则秩 $A=3$，秩 $\overline{A}=4$，秩 $A\neq$ 秩 $\overline{A}$，方程组无解.

(b)若 $k_1=2$ 且 $k_2=1$，经初等行变换得到

$$\overline{A}_2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其基础解系为 $\alpha_1=[0,-2,1,0]^T$，特解 $\eta_0=[-8,3,1,2]^T$. 一般解为

$$\eta = k\alpha_1+\eta_0 \quad (k\ 为任意常数).$$

法二 行列式法

如方程组左端含所有不同参数，先将系数矩阵的行列式 $|A|$ 分解成参数的因式乘积，确定使 $|A|\neq 0$ 的参数取值范围，由克莱姆法则知方程组有唯一解；再用初等行变换求出其唯一解；然后逐个讨论参数取其他值使 $|A|=0$ 时，方程组解的情况. 有解时，用初等行变换求出其解.

例 4[3.10] 设 $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2, \\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1. \end{cases}$

问 λ 为何值时，此方程组有唯一解、无解或有无穷多解？并在无穷多解时求其通解.

解 用行列式法解之. (1)先将系数矩阵行列式分解成 λ 的一次因式的乘积，确定方程组有唯一解的参数取值范围.

注意此系数矩阵行列式为 λ 的三次多项式，先提取其 λ 的一次因式：

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{r_2+r_3}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3-c_2}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 9-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)[(2-\lambda)(9-\lambda)-8]$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-11+10)=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

故当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq10$ 时，因秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=3$，原方程组有唯一解．

下面逐个讨论 λ 取其他值，即 λ 取 1 和 10 时，方程组解的情况．

(2)$\lambda=1$ 时，用初等行变换将增广矩阵 $\overline{A}$ 化成含最高阶单位矩阵的形式：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 2 & 4 & -4 & 2\\ -2 & -4 & 4 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\overline{A}_1.$$

因秩 $\overline{A}=$ 秩 $A=1<n=3$，故方程组有解．由 $\overline{A}_1$ 得知对应的齐次线性方程组的一个基础解系和原方程组的一特解分别为

$$\alpha_1=[-2,1,0]^T,\quad \alpha_2=[2,0,1]^T;\quad \eta_0=[1,0,0]^T,$$

故原方程组的通解为

$$\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta_0\quad(k_1,k_2\text{ 为任意常数})；$$

(3)$\lambda=10$ 时，用初等行变换，将 $\overline{A}$ 化成含最高阶单位矩阵的形式：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2 & 1\\ 2 & -5 & -4 & 2\\ -2 & -4 & -5 & -11\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\overline{A}_1.$$

由 $\overline{A}_1$ 知，秩 $A=2<$ 秩 $\overline{A}=3$，故原方程组无解．

注意 当$|A|$是参数 λ 的三次或三次以上的多项式时，直接展开$|A|$，不易将此多项式分解成 λ 的一次因式的乘积．为此常在展开前，将$|A|$化简，先提取 λ 的一个一次因式，然后再展开计算，分解 λ 的二次多项式．

将$|A|$中不含参数的某元素消成零，使该元素所在的行或列出现参数的一次公因式，这是为提取公因式常采用的技巧．如上例将$|A|$中第 2 行，第 1 列元素消成零，则第 2 行元素就有公因式 $1-\lambda$.

如果$|A|$的行和（或列和）相等，将各列（各行）加到第 1 列（行）也可提取参数的一次因式（详见下列）.

例 5[3.8] 下列线性方程组当 a 取何值时，有唯一解？无穷多组解？无解？

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=1;\\x_1+ax_2+x_3=a;\\x_1+x_2+ax_3=a^2.\end{cases}$$

解法一 用行列式法解之．先求出参数 a 取何值时方程组有唯一解．为此将$|A|$分解成 λ 的一次因式的乘积，因$|A|$的行和相等，有

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}\xlongequal[i=2,3]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}a+2&1&1\\a+2&a&1\\a+2&1&a\end{vmatrix}$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix}1&0&0\\1&a-1&0\\1&0&a-1\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2.$$

由克莱姆法则知，当 $a\neq1,-2$ 时，由于$|A|\neq0$，方程组有唯一解．再逐个讨论参数 a 取其他值即 $a=1$ 及 $a=-2$ 时解的情况．

当 $a=1$ 时，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=1<n=3$，故方程组有无穷多组解．

当 $a=-2$ 时，秩 $A=2<$ 秩 $\overline{A}=3$，故方程组无解．

解法二 对 $\overline{A}$ 施行初等行变换，使之变为行阶梯形矩阵，得

$$\overline{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & a & a^2\\0 & a-1 & 1-a & a(1-a)\\0 & 0 & (1-a)(2+a) & (1-a)(1+a)^2\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

(i)如果 $a\neq1,-2$,则秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=3$,即 $r=n$,方程组有唯一解.

$$\overline{A}_1\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -(1+a)/(2+a)\\0 & 1 & 0 & 1/(a+2)\\0 & 0 & 1 & (a+1)^2/(a+2)\end{bmatrix}\quad(a\neq1,-2),$$

故唯一解为

$x_1=-(1+a)/(2+a)$,$x_2=1/(a+2)$,$x_3=(a+1)^2/(a+2)$.

(ii)如 $a=1$,则秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=1<3=n$,有无穷多组解,将 $a=1$ 代入 $\overline{A}_1$ 中易求得一般解为

$$\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\quad(k_1,k_2\text{ 为任意数}),$$

其中 $\eta_0=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$ 为特解,$\alpha_1=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$ 为对应的齐次线性方程组的基础解系.

(iii)如果 $a=-2$,将其代入 $\overline{A}_1$ 中,不难求得秩 $A=2$,秩 $\overline{A}=3$,秩 $A\neq$ 秩 $\overline{A}$,故方程组无解.

注意 上例方程组的左端是常考的含参数方程组的左端形式(见习题 4.4 第 1 题).

(三)解参数仅出现在方程右端常数项的线性方程组除用初等行变换法外还可试用观察法求出有解的参数取值,然后再求其解.

这类方程组常提问参数取何值时,方程组有解,有解时求出其解.可先试用观察法找出各方程左端所满足的关系,然后由其右端有同样关系,求出方程组有解的参数取值,再按上法求出其解.

例 6[3.9] 非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-2x_1+x_2+x_3=-2, & (1)\\ x_1-2x_2+x_3=\lambda, & (2)\\ x_1+x_2-2x_3=\lambda^2. & (3)\end{cases}$$

解法一　先用观察法求出方程组有解的参数取值．由观察知，方程组三个方程的左端满足关系：(1)＋(2)＋(3)＝0，为使方程组有解，其右端也应有相同关系：$-2+\lambda+\lambda^2=0$，因而得到当 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，方程组有解．下面求出其全部解．

(1)当 $\lambda=1$ 时，经初等行变换，其增广矩阵易化为含最高阶单位矩阵的矩阵：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&1\\1&1&-2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

由 $\overline{A}_1$ 知，对应的齐次方程组的一个基础解系仅含一个解向量 $\alpha=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$．原方程组的一个特解为 $\eta=[1,0,0]^{\mathrm{T}}$，故其解的一般形式为

$$\eta=k_1\alpha_1+\eta_0(k_1 \text{ 为任意常数}).$$

(2)当 $\lambda=-2$ 时，将其增广矩阵用初等行变换化为含最高阶单位矩阵的矩阵：

$$\overline{A}_1\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&3&-3&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2(1/3)}\begin{bmatrix}1&-2&1&-2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2(-1)}\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\overline{A}_1$$

由 $\overline{A}_1$ 知，其对应的齐次方程组的一个基础解系含一个解向量 $\beta=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$．原方程组的一个特解为 $\eta_0=[0,0,-2]^{\mathrm{T}}$，故其解的一般形式为

$$\eta=k_2\beta+\eta_0=k_2[1,1,1]^{\mathrm{T}}+[0,0,-2]^{\mathrm{T}}(k_2 \text{ 为任意常数}).$$

解法二　用初等行变换将其增广矩阵化为行阶梯形矩阵：

$$\begin{bmatrix}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-2&1&\lambda\\0&3&-3&\lambda^2-\lambda\\0&0&0&\lambda^2+\lambda-2\end{bmatrix}=\overline{A}_1.$$

由 $\overline{A}_1$ 知，当 $\lambda^2+\lambda-2=0$，即 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$ 时，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=2<n=3$ 方程组有解．其解的一般形式的求法与解法一相同(略)．

例 7[1990 年 4] 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a, & (1) \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, & (2) \\ \quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b, & (3) \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2. & (4) \end{cases}$$

(i) a,b 为何值时，方程组有解；

(ii)方程组有解时，求出方程组导出组的一个基础解系；

(iii)方程组有解时，求出方程组的全部解．

解法一 先用观察法求出方程组有解的参数取值．观察所给方程组各个方程的左端满足

$$2(1)+(2)=(4), \qquad 3(1)-(2)=(3) \qquad (4.4.1)$$

因方程组有解，其右端也有相同关系，因而得到

$$2a+0=2, \quad 3a-0=b.$$

解之得 $a=1,b=3$．将 $a=1,b=3$ 代入方程组的增广矩阵 $\overline{A}$，并化为含最高阶单位矩阵之形式，有

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故导出组的一个基础解系及原方程组的一特解分别为

$$\begin{aligned} &\alpha_1=[1,-2,1,0,0]^{\mathrm{T}}, \alpha_2=[1,-2,0,1,0]^{\mathrm{T}}, \\ &\alpha_3=[5,-6,0,0,1]^{\mathrm{T}}, \eta_0=[-2,3,0,0,0]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \qquad (4.4.2)$$

故其全部解为

$$\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+\eta_0 \quad (k_1,k_2,k_3 \text{ 为任意常数}). \qquad (4.4.3)$$

解法二 由(4.4.1)式可知方程(3)，(4)为多余方程，去掉后得原方程组的同解方程组：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0. \end{cases}$$

由$\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\3&2&1&1&-3&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\end{bmatrix}$，即得(4.4.2)式与(4.4.3)式．

注意 (1)由上解可知，这里的观察法是观察方程组各方程左端之间的关系．由于方程组有解，右端也满足此关系，从而求出有解时的参数取值．

(2)上例方程组各方程左端的四个线性表示式常在方程组中出现(参阅习题4.4第2题)，其相互关系应能熟练地看出．

解法三 用初等行变换化增广矩阵$\overline{A}$为阶梯形矩阵：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\3&2&1&1&-3&0\\0&1&2&2&6&b\\5&4&3&3&-1&2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&a\\0&1&2&2&6&3a\\0&0&0&0&0&b-3a\\0&0&0&0&0&2-2a\end{pmatrix}=\overline{A}_1.$$

由$b-3a=0,2-2a=0$得到$a=1,b=3$．由

$$\overline{A}_1\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&-5&-2\\0&1&2&2&6&3\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

即得(4.4.2)式与(4.4.3)式．

习　题　4.4

1.[1995年5] 对于下列方程组讨论λ取何值时，方程组无解，有唯一解和无穷多组解．在方程组有无穷多组解时，试用其导出组的基础解系表示其全部解：

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3,\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2,\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2.\end{cases}$$

2. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, & (1)\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, & (2)\\ \qquad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, & (3)\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b. & (4)\end{cases}$$

(i)当 a,b 取什么数值时，此方程组有解；

(ii)求出对应的齐次线性方程组的基础解系；

(iii)在有解的情形下，写出此方程组的一般解．

3.［1989 年 1，2］ 问 λ 为何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3=\lambda & (5)\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2 & (6)\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3 & (7)\end{cases}$$

有解，并求其解的一般形式．

§4.5 解向量的证法

证法一 代入法．

将所给向量代入已知线性方程组，证其等于零．

例 1 假设齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0;\\ \cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵 A 的行列式 $|A|=0$，A_{ij}是 $|A|$ 中元素 a_{ij}的代数余子式，试证向量 $\alpha_k=[A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}]$$(k=1,2,\cdots,n)$是上方程组的 n 个解向量$(1\leqslant k\leqslant n)$.

证 将 $x_1=A_{k1},x_2=A_{k2},\cdots,x_n=A_{kn}$代入上方程组，利用

$$a_{j1}A_{k1}+a_{j2}A_{k2}+\cdots+a_{jn}A_{kn}=\begin{cases} 0, & j\neq k,\\ |A|=0, & j=k,\end{cases}$$

可知 $\alpha_k=[A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn}]$$(k=1,2,\cdots,n)$为上方程组的解向量．

证法二 左乘矩阵法．

例 2 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 为方程组 $AX=b(b\neq 0)$ 的解向量，试问它们的线性组合 $\beta=\lambda_1\beta_1+\lambda_1\beta_2+\cdots+\lambda_k\beta_k$ 是否仍为其解向量？若不然，应满足什么条件？

解 一般不是．当且仅当 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$ 时，其线性组合 $\beta=\lambda_1\beta_1+\lambda_1\beta_2+\cdots+\lambda_k\beta_k$ 才为 $AX=b$ 的解向量．

事实上，将 A 左乘 $\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_k\beta_k$，利用 $A\beta_i=b$ 得到

$$A(\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_k\beta_k)=\lambda_1A\beta_1+\cdots+\lambda_kA\beta_k$$
$$=\lambda_1 b+\cdots+\lambda_k b=(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)b.$$

欲使 $A(\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_k\beta_k)=b$，当且仅当

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_k)b=b \quad 即(\lambda_1+\cdots+\lambda-1)b=0.$$

因 $b\neq 0$，于是当且仅当 $\lambda_1+\cdots+\lambda_k=1$ 时，β 为解向量．

例 3 设 η_0 为 $AX=b$ 的一个特解，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一个基础解系，秩 $A=r$，则 $AX=b$ 的任一解 η 可表为

$$\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}, \tag{4.5.1}$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数．

证 因 η,η_0 为 $AX=b$ 的解向量，故 $\eta-\eta_0$ 为 $AX=0$ 的解向量．而 $AX=0$ 的任一解向量可表为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的线性组合，故

$$\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$ 证毕

注意 本例说明可利用对应的齐次线性方程组的基础解系来表示非齐次线性方程组的所有解向量．这是非齐次线性方程组解向量的一种表示形式．另一种表示形式见本节例 8.

证法三 根据本节例 3 的结论证之．

例 4[4.25] 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $AX=b(b\neq 0)$ 的 s 个解向量，$k_1,\cdots,k_s$ 为实数，满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，证明

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2++k_s\eta_s \tag{4.5.2}$$

为 $AX=b$ 的解向量．

证明一 根据本节例 3 的结论证之．设 η_0 为 $AX=b$ 的一个特解，秩 $A=r$，且设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的一个基础解系．因

$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为 $AX=b$ 的解向量，由本节例 3 知道，可设

$$\eta_i=\eta_0+a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{i,n-r}\alpha_{n-r},$$

其中 $i=1,2,\cdots,s$. 由 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，得到

$$\begin{aligned}\eta &=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\\ &=\Big(\sum_{i=1}^{s}k_i\Big)\eta_0+\Big(\sum_{i=1}^{s}k_ia_{i1}\Big)\alpha_1+\cdots+\Big(\sum_{i=1}^{s}k_ia_{i,n-r}\Big)\alpha_{n-r}\\ &=\eta_0+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{n-r}\alpha_{n-r}.\end{aligned}$$

η 是特解 η_0 加上一基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的线性组合，其中

$$t_j=k_1a_{1j}+k_2a_{2j}+\cdots+k_sa_{sj}(j=1,2,\cdots,n-r),$$

故 η 为 $AX=b$ 的解向量.

证明二 A 左乘(4.5.2)式，由 $A\eta_i=b(i=1,2,\cdots,s)$，得

$$\begin{aligned}A\eta &=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_sA\eta_s\\ &=k_1b+k_2b+\cdots+k_sb=(k_1+k_2+\cdots+k_s)b=b,\end{aligned}$$

故 η 为 $AX=b$ 的解向量.

证明三 利用非齐次线性方程组与其对应的齐次线性方程组(即与其导出组)解向量之间关系证之(参阅本节证法四).

$$\begin{aligned}\eta &=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\\ &=(1-k_2-k_3-\cdots-k_s)\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s\\ &=\eta_1+k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)+\cdots+k_s(\eta_s-\eta_1),\end{aligned}$$

由 $A(\eta_i-\eta_1)=0(i=1,2,\cdots,s)$，得到

$$A\eta=A\eta_1+k_2\cdot 0+\cdots+k_s\cdot 0=b,$$

即 η 为 $AX=b$ 的解向量. 证毕

证法四 利用非齐次线性方程组与其对应的齐次线性方程组(即与其导出组)解向量之间的关系及非齐次线性方程组的解向量之间的关系证(求)之.

上述关系用命题表述如下.

命题 4.5.1 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 是 $AX=b(b\neq 0)$ 的 s 个解向量，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为 s 个实数，且满足 $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，则 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_s\eta_s$ 也是 $AX=b$ 的解(本节例 4).

命题 4.5.2 设 η_1, η_2 为 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解向量，则 $\eta_1-\eta_2$ 为其导出组 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量．

命题 4.5.3 设 η_0 为 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解向量，α_0 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，则 $\eta_0+\alpha_0$ 是 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解向量．

命题 4.5.4 α_1, α_2 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，则 $\alpha_1 \pm \alpha_2$ 也是．

命题 4.5.5 设 α 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，k 为任意常数，则 $k\alpha$ 也是 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量．

例 5[填空题] 已知非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的两个解 X_1, $X_2(X_1 \neq X_2)$，则______是相应的齐次线性方程 $AX=\mathbf{0}$ 的解．

(A)X_1-X_2　　　　(B)$2(X_1-X_2)$

(C)$(X_1+X_2)/2$　　(D)$(X_2-X_1)/2$

解 由命题 4.5.2 及命题 4.5.5 可知 X_1-X_2, $2(X_1-X_2)$, $(X_2-X_1)/2$ 均为 $AX=\mathbf{0}$ 的解．

例 6[选择题] 已知线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$的两个解 X_1, $X_2(X_1\neq X_2)$，则(　　)一定是 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解．

(A)X_1+X_2　(B)X_1-X_2　(C)$2X_2-X_1$　(D)$(X_1+X_2)/2$

解法一 由命题 4.5.1 知$(X_1+X_2)/2$ 为 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解．这是因为 $k_1+k_1=1/2+1/2=1$．同理可知 $2X_2-X_1=2X_2+(-1)X_1$，也是其解．

解法二 用左乘矩阵法证之．事实上

(A)$A(X_1+X_2)=AX_1+AX_2=2\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{b}$;

(B)$A(X_1-X_2)=AX_1-AX_2=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\mathbf{0}\neq\boldsymbol{b}$;

(C)$A(2X_2-X_1)=2AX_2-AX_1=2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$;

(D)$A[(X_1+X_2)/2]=AX_1/2+AX_2/2=\boldsymbol{b}/2+\boldsymbol{b}/2=\boldsymbol{b}$.

例 7 设 η_1 与 η_2 是 $AX=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0})$的两个不同解($A$ 是 $m\times n$ 矩阵)，ξ 是 $AX=\mathbf{0}$ 的一个非零解．证明

(1)向量组 $\eta_1, \eta_1-\eta_2$ 线性无关；

(2)若秩 $A=n-1$，则向量组 ξ, η_1, η_2 线性相关．

证 (1)**证明一** 因 $\eta_1-\eta_2$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解，而 η_1 为 $AX=\boldsymbol{b}$

的解，故 η_1 不能由 $\eta_1-\eta_2$ 线性表出，故 $\eta_1,\eta_1-\eta_2$ 线性无关．

（1）证明二　设 $k_1\eta_1+k_2(\eta_2-\eta_1)=0$ 用左乘矩阵法易证 $k_1=k_2=0$.

（2）因 $\xi,\eta_2-\eta_1$ 均为 $AX=0$ 的解，而秩 $A=n-1$，其基础解系只含一个解向量，而 $\eta_2-\eta_1\neq 0$，故 ξ 可用 $\eta_2-\eta_1$ 线性表示，因而

$$\xi=k(\eta_2-\eta_1)，即\ \xi+k\eta_1-k\eta_2=0,$$

所以 ξ,η_1,η_2 线性相关．

例 8　设非齐次线性方程组 $AX=b$ 有特解 η_0，它的导出组 $AX=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，其中秩 $A=r$. 证明

（1）$\eta_0,\eta_1=\eta_0+\alpha_1,\eta_2=\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_{n-r}=\eta_0+\alpha_{n-r}$ 是 $AX=b$ 的线性无关的解向量；

（2）$\eta_0,\eta_1,\eta_2\cdots,\eta_{n-r}$ 的一切线性组合：

$$\eta=k_0\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r} \tag{4.5.3}$$

其中 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$，是 $AX=b$ 的全部解向量．

证　（1）因 η_0 为 $AX=b$ 的解，α_i 为 $AX=0$ 的解，由命题 4.5.3 知 $\eta_i=\eta_0+\alpha_i(i=1,2,\cdots,n-r)$ 为 $AX=b$ 的解．$\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 线性无关的证明见 §3.5 例 16.

（2）因 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$，由命题 4.5.1 知 $k_0\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$ 为 $AX=b$ 的解．另一方面，令 η 为其任一解，则 $\eta-\eta_0$ 为 $AX=0$ 的解．于是可写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 的线性组合：

$$\eta-\eta_0=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}.$$

又因 $\eta_i=\eta_0+\alpha_i$ 得到 $\alpha_i=\eta_i-\eta_0(i=1,2,\cdots,n-r)$，将它们代入上式得到

$$\eta=(1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}.$$

令 $k_0=1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r}$，即 $k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1$ 时，有

$$\eta=k_0\eta_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}\quad(k_0+k_1+\cdots+k_{n-r}=1),$$

这就证明了 $AX=b$ 的任一解可写成 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 的线性组合，即 $\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_{n-r}$ 的上述一切线性组合为 $AX=b$ 的全部解向量. 解毕

非齐次线性方程组与其对应的齐次线性方程组（即与其导出

组)解之关的关系还表现在:由非齐次线性方程组 $AX=b$ 有无穷多组解(有唯一解),可以推知对应的齐次线性方程组(导出组)$AX=0$ 有非零解,因而有无穷多个解(只有零解). 值得注意的是其逆不成立,即一般不能由对应的齐次线性方程组(其导出组)解的情况推知非齐次线性方程组解的情况. 这是因为一般不能由秩 $A<n$(秩 $A=n$)推知秩 $A=$ 秩 $\overline{A}$ 成立. 因此可能出现对应的齐次方程组有解,而非齐次方程组却没有解的情况.

例 9[1991 年 5][选择题] 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,$AX=0$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 所对应的齐次线性方程组,则下列结论正确的是

(A)若 $AX=0$ 仅有零解,则 $AX=b$ 有唯一解

(B)若 $AX=0$ 有非零解,则 $AX=b$ 有无穷多解

(C)若 $AX=b$ 有无穷多解,则 $AX=0$ 仅有零解

(D)若 $AX=b$ 有无穷多解,则 $AX=0$ 有非零解

解 由(A)中题设有秩 $A=r=n$,但与秩 $\overline{A}$ 不一定相等,因而 $AX=b$ 不一定有解. 由(B)中题设有秩 $A=r<n$,与(A)同理,$AX=b$ 不一定有解. 由(C)与(D)中题设均有秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=r<n$,这时 $AX=0$ 必有非零解. 于是(D)入选,其他都不对!

习　　题 4.5

1. 设矩阵 A 的秩为 r,η_0 为 $AX=b$ 的特解,$AX=0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$,$X$ 的维数为 n,证明

$$\eta_0,\eta_0-\alpha_1,\eta_0-\alpha_2,\cdots,\eta_0-\alpha_{n-r}$$

为 $AX=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解.

2. 设 $\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}]$,$X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$A=[a_{ij}]_{n\times n}$,秩 $A=n$,又设方程组 $\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}X=0$,试证

$$\beta_1=[A_{r+1,1},\cdots,A_{r+1,n}]^{\mathrm{T}},\cdots,\beta_{n-r}=[A_{n,1},\cdots,A_{n,n}]^{\mathrm{T}}$$

为该方程组的解，这里 A_{ij}是 A 中元素 a_{ij}的代数余子式．

§4.6 A 和 $\boldsymbol{b}$ 没具体给出如何求 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解

常根据矩阵 A 的性质和 $AX=\boldsymbol{b}$ 的解的情况，利用解的性质，求出其通解．下分两种情况讨论．

(一)齐次线性方程组通解的求法

命题 4.6.1 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，秩 $A=r<n$，则 $AX=\mathbf{0}$ 存在基础解系，且一个基础解系包含 $n-r$ 个解向量，其通解为

$$\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}(k_1,\cdots,k_{n-r}\text{为任意常数}). \quad (4.6.1)$$

由上述命题可知，为求 $AX=\mathbf{0}$ 的通解，必先求出 A 的秩 r，明确一个基础解系含多少个解向量，然后设法求出这些解向量．

例 1[1993 年 1,2] 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且秩 $A=n-1$，求线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的通解．

解 X 的维数为 n，秩 $A=n-1$，故 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础系含 $n-r=n-(n-1)=1$ 个解向量．又因 A 的各行元素之和为零，故非零向量 $\alpha_1=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 满足方程组 $AX=\mathbf{0}$，因而 α_1 为 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系，于是其通解为

$$\alpha=k_1\alpha_1(k_1\text{为任意常数}).$$

例 2[选择题] 设 A 为 n 阶方阵，且秩 $A=n-1$，α_1、α_2 是 $AX=\mathbf{0}$ 的两个不同的解向量，则 $AX=\mathbf{0}$ 的通解为____．

(A)$k\alpha_1$　(B)$k\alpha_2$　(C)$k(\alpha_1-\alpha_2)$　(D)$k(\alpha_1+\alpha_2)$

解 因 X 的维数为 n，秩 $A=n-1$，故一个基础解系只含一个解向量，此解向量必为非零向量(线性无关)．因 α_1 与 α_2 中可能有一个为零向量，故(A)、(B)都不能入选；另外，两个不同解向量相减不可能为零向量，故(C)入选．因可能有 $\alpha_1+\alpha_2=\mathbf{0}$，故(D)落选

(二)非齐次线性方程组通解的求法

非齐次线性方程组 $AX=b$ 的通解有多种表示方式[详见(4.5.1)式,(4.5.3)式或(4.6.4)式],表示方式不同,其求法也不一样.

通解常用的一种表示方式是

命题 4.6.2 设 $AX=b$, A 为 $m\times n$ 矩阵,且秩 $A=r$, η_0 为 $AX=b$ 的一特解, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为 $AX=0$ 的基础解系,则 $AX=b$ 的通解为

$$\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-r}\alpha_{n-r}(k_1,\cdots,k_{n-r}\text{为任意实数}). \quad (4.6.2)$$

求上述形式的通解,有两类命题.一是给出 $AX=b$ 的若干个特解与(或)其和向量,求其通解;二是给出 $AX=0$ 的基础解系,求 $AX=b$ 的通解.

为求解第一类命题常根据上节介绍的解的有关性质求出 $AX=0$ 的基础解系.

例 3[4.20] 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3,已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量,且

$$\eta_1=[2,3,4,5]^T,\eta_2+\eta_3=[1,2,3,4]^T,$$

求该方程组的通解.

解法一 利用齐次与非齐次方程组解向量的关系求之.

设该方程组为 $AX=b$,其一个特解为 η_1,则对应的齐次线性方程组为 $AX=0$,下求其基础解系.

因秩 $A=3$, $n=4$,故一个基础解系只含一个解向量.因 η_1, η_2, η_3 为 $AX=b$ 的解向量,由解向量关系知, $\alpha_1=\eta_1-\eta_2$, $\alpha_2=\eta_1-\eta_3$ 为 $AX=0$ 的解向量,从而

$$\alpha_1+\alpha_2=2\eta_1-[\eta_2-\eta_3]=[3,4,5,6]\neq 0$$

仍为 $AX=0$ 的解向量,且为一基础解系,故通解为

$$X=\eta_1+k(\alpha_1+\alpha_2)=\eta_1+k[3,4,5,6]^T(k\text{ 为任意数}).$$

解法二 因 $A\eta_2=b$, $A\eta_3=b$,故 $A[(\eta_2+\eta_3)/2]=b$,所以 $\eta_4=$

$(\eta_2+\eta_3)/2$ 为 $AX=b$ 的解向量，η_1 也为其解向量，因而 $\alpha=\eta_1-\eta_4=[3/2,2,5/2,3]^T$ 也为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，故任一解向量

$$X=k\alpha+\eta_1(k\text{ 为任意数}).$$

解法三 利用非齐次线性方程组解向量的关系求出 $AX=b$ 的一特解．事实上，因 $\eta_2+\eta_3-\eta_1$ 的组合系数之和为 $1+1-1=1$，故 $\eta_2+\eta_3-\eta_1$ 为 $AX=b$ 的一特解(详见上节例 4)．又因向量组 $\eta_2+\eta_3-\eta_1=[-1,-1,-1,-1]^T$，$\eta_1$ 线性无关，且 $n-r+1=4-3+1=2$，故任一解向量 X 可用这两个解向量的线性组合表示[见(4.5.3)式]：

$$X=k_1\eta_1+k_2(\eta_2+\eta_3-\eta_1)\qquad(k_1+k_2=1).$$

例 4[1994 年 4] 设方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3;\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3;\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3;\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$$

(1)证明若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不等，则此方程组无解．

(2)设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$，且已知 β_1,β_2 是该方程组的两个解，其中

$$\beta_1=[-1,1,1]^T,\qquad\beta_2=[1,1,-1]^T$$

试写出此方程组的通解．

解 (1)因 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，$|\overline{A}|$ 为 4 阶范德蒙行列式，故 $|\overline{A}|\neq0$，即秩 $\overline{A}=4$，而 A 为 4×3 矩阵，秩 $A\leqslant3$，所以秩 $A\neq$ 秩 $\overline{A}$，上方程组无解．

(2)当 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq0)$ 时，得等价方程组

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3;\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3.\end{cases}$$

因 $k\neq0$，秩 $A=$ 秩 $\overline{A}=2<3=n$，基础解系只含 $n-r=3-2=1$ 个解向量．又由命题 4.5.2 知，$\alpha=\beta_1-\beta_2=[2,0,-2]^T$ 为 $AX=\mathbf{0}$

的一基础解系，故原方程组的通解为

$$\eta=c\alpha+\beta_1 \text{ 或 } \eta=c\alpha+\beta_1(c \text{ 为任意常数}).$$ 解毕.

为求解第二类命题常根据命题 4.5.1，4.5.5 求出 $AX=\boldsymbol{b}$ 的一特解.

例 5[1990 年 1,2][选择题] 设 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，α_1,α_2 是 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解为

(A)$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+(\beta_1-\beta_1)/2$.

(B)$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+(\beta_1+\beta_2)/2$.

(C)$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+(\beta_1-\beta_1)/2$.

(D)$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+(\beta_1+\beta_1)/2$.

解 因已知 α_1,α_2 为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，由(4.6.2)式可知为求 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解，只须找出 $AX=\boldsymbol{b}$ 的一特解. 因

$$(\beta_1+\beta_2)/2=\beta_1/2+\beta_1/2,\quad 1/2+1/2=1,$$

由命题 4.5.1 可知，$(\beta_1+\beta_2)/2$ 为一特解，而 $(\beta_1-\beta_2)/2$ 不是.

又因 α_1,α_2 为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解，故由命题 4.5.4 知，$\alpha_1-\alpha_2$ 为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解，易证 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 线性无关，故 $\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2$ 也为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的一基础解系. 因而(B)入选.

虽然(D)中 $(\beta_1+\beta_1)/2$ 为 $AX=\boldsymbol{b}$ 的特解，但因 $\alpha_1,\beta_1-\beta_2$ 均为 $AX=\boldsymbol{0}$ 的解，无法证明它们线性无关，故(D)不一定构成 $AX=\boldsymbol{b}$ 的通解.

例 6 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1;\\ \cdots\\ a_{m,1}x_1+a_{m,2}x_2+\cdots+a_{m,n}x_n=b_m.\end{cases}\tag{4.6.3}$$

有解，且系数矩阵的秩为 $r<n$，证明(4.6.3)的所有解向量中线性无关的最大个数恰为 $n-r+1$ 个.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$ 为(4.6.3)对应的齐次线性方程组的基础解系，η_0 为(4.6.3)的一个特解，则 $\eta_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$ 线性无关(见

§3.5 例 16)，又方程组(4.6.3)的任意解向量均可写成 $\eta_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$的线性组合(见上节例 3). 于是由命题 2.19.1 知，解向量组的秩$\leqslant$秩$\{\eta_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}\}=n-r+1$.

另一方面，由上节例 7 可作出 $n-r+1$ 个线性无关的特解：

$$\eta=\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_{n-r}.$$

于是至少可找出方程组(4.6.3)的 $n-r+1$ 个线性无关的特解，因而解向量组的秩$\geqslant n-r+1$，故线性方程组(4.6.3)的所有解向量中线性无关的最大个数恰为 $n-r+1$. 证毕.

由于 $AX=b$ 的解向量中线性无关的最大个数为 $n-r+1$，于是其任一解都可写成这 $n-r+1$ 个解向量的线性组合，即

例 7[4.26] 设 $AX=b$ 有解，$b\neq 0$，秩 $A=r$，n 为 X 的维数，又设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r+1}$是其 $n-r+1$ 个线性无关的解向量(由上例知它确有 $n-r+1$ 个线性无关的解向量). 试证它的任一解 η 可表示为

$$\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}, \qquad (4.6.4)$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$.

证 设 η_0 为方程组 $AX=b$ 的一个特解，$AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，则

$$\eta=\eta_0+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{n-r}\alpha_{n-r}. \qquad (4.6.5)$$

将上式右端恒等变形，改写为 $n-r+1$ 个线性无关的解向量的线性组合.

由上节例 8 可知 $\eta_0,\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_{n-r}$为 $AX=b$ 的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量，于是设法将(4.6.5)式改写成 η_0，$\eta_0+\alpha_1,\eta_0+\alpha_2,\cdots,\eta_0+\alpha_{n-r}$的线性组合. 事实上将(4.6.5)式进行恒等变形得到

$$\begin{aligned}\eta &=\eta_0-t_1\eta_0-t_2\eta_0-\cdots-t_{n-r}\eta_0+\\ &\quad t_1\eta_0+t_2\eta_0+\cdots+t_{n-r}\eta_0+t_1\alpha_1+t_2\alpha_2+\cdots+t_{n-r}\alpha_{n-r}\\ &=(1-t_1-t_2-\cdots-t_{n-r})\eta_0+t_1(\eta_0+\alpha_1)+\\ &\quad t_2(\eta_0+\alpha_2)+\cdots+t_{n-r}(\eta_0+\alpha_{n-r}).\end{aligned}$$

令 $\eta_0=\eta_1,\eta_0+\alpha_1=\eta_2,\cdots,\eta_0+\alpha_{n-r}=\eta_{n-r+1}$,

$k_1=1-t_1-t_2-\cdots-t_{n-r},k_{i+1}=t_i(i=1,2,3,\cdots,n-r)$,

则 $\eta=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-r+1}\eta_{n-r+1}$,

且有 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-r+1}=1$. 证毕.

注意 (4.6.4)式说明非齐次线性方程组的任一解向量可以用该方程组自身的 $n-r+1$ 个线性无关解向量的线性组合来表示,但其组合系数之和必等于 1. 这是非齐次线性方程组任一解向量的另一种表示方式[比较(4.5.1)式及(4.5.3)式].

$AX=b$ 的通解也可按(4.6.4)式写出. 为此只须求出其 $n-r+1$个线性无关的解向量,其中秩 $A=r$.

例 8 设三元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的系数矩阵 A 的秩为 2,且它的三个解向量 β_1,β_2,β_3 满足 $\beta_1+\beta_2=[3,1,-1]^T$、$\beta_1+\beta_2=[2,0,-2]^T$. 求 $AX=b$ 的通解.

解法一 因 $r=$秩 $A=2,n=3$,故 $n-r+1=2$. 下求 $AX=b$ 的两个线性无关的解向量. 由(4.5.2)式知

$\eta_1=(\beta_1+\beta_3)/2=[3/2,1/2,-1/2]^T,\eta_2=(\beta_1+\beta_3)/2=[1,0,-1]^T$

均为 $AX=b$ 的解向量(其中 $k_1+k_2=1/2+1/2=1$),且线性无关,故其通解由(4.6.5)式可知为

$$\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2(c_1,c_2\text{ 为任意常数}).$$

解法二 由秩 $A=2,n=3$ 知,$AX=0$ 的基础解系只含一个解向量(即 $AX=0$ 的解空间的维数为 $3-2=1$). 因此它的任一非零解向量都可作为其基础解系. 由命题 4.5.2 知

$\alpha=\eta_2-\eta_3=\eta_1+\eta_2-\eta_3-\eta_1=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_1+\eta_3)=[1,1,1]^T$

为 $AX=0$ 的非零解向量,又 $\eta_0=(\eta_1+\eta_3)/2=[1,0,-1]^T$ 为 $AX=b$ 的一特解,故 $AX=b$ 的通解为 $\eta=k\alpha+\eta_0$,k 为任意常数.

习 题 4.6

1. 已知四元非齐次线性方程组的系数矩阵之秩为 3,η_1,η_2,η_3 是它的三

个解向量，其中

$$\eta_1+\eta_2=[1,1,0,2]^{\mathrm{T}},\eta_2+\eta_3=[1,0,1,3]^{\mathrm{T}}.$$

试求该非齐次线性方程组的通解．

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 为 $n-1$ 个线性无关的 n 维列向量，而 β_1,β_2 是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}$ 均正交的两个不同的 n 维列向量，试求 $AX=\mathbf{0}$ 的通解，其中 $A^{\mathrm{T}}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1}]$.

3. 三元非齐次线性方程组的系数矩阵之秩为 1，已知 η_1,η_2,η_3 是它的三个解向量，且

$$\eta_1+\eta_2=[1,2,3]^{\mathrm{T}},\quad \eta_2+\eta_3=[0,-1,1]^{\mathrm{T}},\eta_3+\eta_1=[1,0,-1]^{\mathrm{T}}.$$

试求该非齐次线性方程组的通解．

§4.7 已知基础解系，如何反求其齐次线性方程组

已知系数矩阵 A，我们知道如何求 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系．本节讨论它的反问题，即已知基础解系，如何求其系数矩阵 A，使 $AX=\mathbf{0}$ 的一基础解系恰为所给的一组线性无关的解向量．

设 A 为 $m\times n$ 矩阵，X 为 n 维列向量，秩 $A=r$，又设所给基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$，则有 $A\alpha_i=0(i=1,2,\cdots,n-r)$，即

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}]=O.$$

对上式取转置得到

$$\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_{n-r}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}A^{\mathrm{T}}=O.$$

令 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_{n-r}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，$A^{\mathrm{T}}=[\beta_1,\cdots,\beta_m]$，由上式得到

$$B[\beta_1,\cdots,\beta_m]=O.$$

由此可知所求矩阵 A^{T} 的 m 个列向量 β_i，即 A 的 m 个行向量 β_i^{T} 为 $BX=\mathbf{0}$ 的解向量．于是得到矩阵 A 的求法如下：

(1)以所给的基础解系为行向量作矩阵 B;

(2)解 $BX=\mathbf{0}$,求出其基础解系;

(3)以(2)中所求得的基础解系中向量为行向量作矩阵,该矩阵即为所求的一个矩阵 A.

注意 用上述方法所求得的矩阵 A 不唯一. 这是因为一方面(2)中基础解系不唯一,另一方面增加若干个由(2)中基础解系的线性组合作行向量组成的矩阵仍为所求之矩阵.

例 1[1992 年 1,2][选择题] 要使 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$,$\alpha_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$都是线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解,只要系数矩阵 A 为( ).

(A)$\begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ (B)$\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

(C)$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ (D)$\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$

解 α_1,α_2 线性无关,以 $\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}}$ 为行向量作矩阵 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$,解 $BX=\mathbf{0}$,得基础解系 $\beta_1=[-2,1,1]^{\mathrm{T}}$. 以 β_1^{T} 为行向量作矩阵 $A=[\beta_1^{\mathrm{T}}]$,则 A 即为所求之矩阵,因而(A)入选.

注意 由于 $BX=\mathbf{0}$ 的基础解系不唯一,矩阵 A 不唯一. 另一方面增加若干个由 β_1^{T} 的线性组合作行向量所得的矩阵,例如

$$\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\-\beta_1^{\mathrm{T}}\\2\beta_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\2 & -1 & -1\\-4 & 2 & 2\end{bmatrix}$$
也为所求的矩阵 A.

例 2 试用反求线性方程组的方法解 §4.1 例 4.

解 因已知方程组(Ⅰ)的通解,故易知其一基础解系为 $\alpha_1=[0,1,1,0]^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=[-1,2,2,1]^{\mathrm{T}}$,以 $\alpha_1^{\mathrm{T}},\alpha_2^{\mathrm{T}}$ 为行向量作矩阵 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\\alpha_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$,解 $BX=\mathbf{0}$,求出一基础解系为

$$\beta_1=[0,-1,1,0]^{\mathrm{T}},\beta_2=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}},$$

于是方程组(Ⅰ)的系数矩阵之一为

$$A=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

将方程组(Ⅱ):$AX=\mathbf{0}$ 与方程组(Ⅰ)联立,得到

$$\begin{cases}x_1+x_2+0x_3+0x_4=0,\\ 0x_1+x_2+0x_3-x_4=0,\\ 0x_1-x_2+x_3-0x_4=0,\\ x_1+0x_2+0x_3+x_4=0,\end{cases}$$

其基础解系为 $\alpha_1=[-1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$,故方程组(Ⅰ),(Ⅱ)所有的公共非零解为 $\alpha=k\alpha_1$,其中 k 为任意非零常数.

例 3 求以 $\alpha_1=[1,-1,1,0]$,$\alpha_2=[1,1,0,1]$,$\alpha_3=[2,0,1,1]$为解向量的齐次线性方程组.

解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的一个极大无关组为 α_1,α_2,作矩阵 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}$,解 $BX=\mathbf{0}$ 得一基础解系 $\beta_1=[1,0,-1,-1]^{\mathrm{T}}$,$\beta_2=[0,1,1,-1]^{\mathrm{T}}$,则所求系数矩阵之一为

$$A=\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \beta_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

注意 作矩阵 B 的目的是求 $BX=\mathbf{0}$ 的基础解系.因此如令 $B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$ 也可以,所得结果相同.看不出所给向量之间的线性关系时,就以它们为行向量,作矩阵 B.

习　　题　4.7

1.[4.19] 设方程组 $AX=\mathbf{0}$ 以 $\alpha_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$ 为其基础解系,求该方程组.

2.[选择题] 要使 $\alpha_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$,$\alpha_2=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}$ 都是线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的解,只要系数矩阵 A 为____.

(A) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 1 & 2\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & 2 & 0\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

§4.8 简单矩阵方程的解法

本节主要讨论下列三种简单矩阵方程

$$AX=B, XA=B, AXB=C$$

的解法．其解法有初等变换法，求逆法以及待定元素法等．

方法一 初等变换法

方程类型不同，用的初等变换也不同，下分三种情况说明．

(Ⅰ)解 $AX=B$，用初等行变换法，即

(i)当 A 为可逆矩阵时，

$$[A \vdots B]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}[E \vdots A^{-1}B].$$

(ii)A 不是可逆矩阵时，$AX=B$ 可能无解，也可能有解．如有解，也不唯一，应利用线性方程组的理论判定是否有解，有解时，利用解线性方程组的方法求出．判定前，应先用初等行变换尽可能化简方程．

例 1[3.12(1)] 解矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\4 & 0 & 1\\-1 & 3 & -2\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}-3 & -5\\6 & -1\\-8 & -5\end{bmatrix}.$$

解 $$\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 2 & -1 & -3 & -5\\4 & 0 & 1 & 6 & -1\\-1 & 3 & -2 & -8 & -5\end{array}\right]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\left[\begin{array}{ccc:cc}1 & 0 & 0 & 1 & -4\\0 & 1 & 0 & -1 & 7\\0 & 0 & 1 & 2 & 15\end{array}\right]$$

右边矩阵中虚线左半部为单位矩阵，因而矩阵方程的系数矩阵为可逆矩阵，且其解为

$$X=\begin{bmatrix}1 & -4\\ -1 & 7\\ 2 & 15\end{bmatrix}.$$

例 2 设矩阵 A 和 B 满足 $AB=A+2B$，求 B，其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

解 由 $AB=A+2B$，得 $(A-2E)B=A$，其中 E 为 3 阶单位矩阵，于是求矩阵 B 转化为解矩阵方程 $(A-2E)X=A$.

因矩阵 $[A-2E \vdots A]$ 经初等行变换变成新矩阵：

$$A=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 5 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 3\end{array}\right]=[E \vdots X=(A-2E)^{-1}A],$$

故
$$B=X=\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ 4 & -3 & -2\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

例 3 解矩阵方程 $AX=B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 1 & 11 & 7\\ 7 & 5 & 7\end{bmatrix}.$$

解 对 $[A \vdots B]$ 施行初等行变换，得到

$$[A \vdots B]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 3 & 0 & 7 & 5 & 7\\ 0 & -5 & 1 & -9 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right],$$

易看出 A 不可逆. 因秩 $[A \vdots B]=$ 秩 $A=2$，故原矩阵方程有解，又因原方程与下列方程

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -5 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}7 & 5 & 7\\ -9 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.8.1}$$

同解，归结为解上矩阵方程. 设

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}. \tag{4.8.2}$$

将(4.8.2)式代入 $AX=B$，比较两端第 1 列的对应元素，得到

$$\begin{cases} 3x_1-x_4+2x_7=3, \\ 4x_1-3x_4+3x_7=1, \\ x_1+3x_4+0x_7=7, \end{cases} \text{解之，得} \begin{cases} x_1=7-3x_4, \\ x_4=x_4, \\ x_7=5x_4-9. \end{cases}$$

比较第 2,3 列对应元素，得对应方程组，解之，分别得到

$$\begin{cases} x_2=5-3x_5, \\ x_5=x_5, \\ x_8=5x_5-3. \end{cases} \text{与} \begin{cases} x_3=7-3x_6, \\ x_6=x_6, \\ x_9=5x_6-7. \end{cases}$$

将它们代入(4.8.2)式，得到

$$X=\begin{bmatrix} 7-34 & 5-3x_5 & 7-3x_6 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ -9+5x_4 & -3+5x_5 & -7+5x_6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_4, x_5, x_6 \\ \text{为任意常数} \end{pmatrix}.$$

例 4 解矩阵方程 $AX=B$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}.$$

解法一 A 不可逆，可用初等行变换化简矩阵方程

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 3 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 4 \\ 0 & 5 & 10 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}} \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

解其同解矩阵方程 $A_1X=B_1$，其中

$$A_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

因秩$[A_1 \vdots B_1]=3\neq 2=$秩 A_1,原方程无解.

解法二 设 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$,代入同解方程 $A_1X=B_1$,得

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

比较对应元素,得到 $3=0$ 的矛盾,因而原方程无解.

(Ⅱ)解矩阵方程 $XA=B$,用初等列变换法.

当 A 可逆时,可按如下格式求出 $X=BA^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}\xrightarrow{\text{经初等列变换}}\begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{bmatrix};$$

当 A 不可逆时,仿本节(Ⅰ)中(ii)那样处理.

例 5[3.12(2)] 设 $XA=B$,求 X,其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

解 $$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E \\ \cdots \\ BA^{-1} \end{bmatrix},$$

故 $$X=BA^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅲ)A,B 可逆时,由(Ⅰ)和(Ⅱ)可得 $AXB=C$ 的解法.

先将 n 阶矩阵 A 变成 E_n 的初等行变换作用于 C,得到 $XB=A^{-1}C$,然后再将 m 阶矩阵 B 变成 E_m 的初等列变换作用于 $A^{-1}C$,

得到 $X=A^{-1}CB^{-1}$，即

$$[A \vdots C]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}[E_n \vdots A^{-1}C],$$

$$\begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ A^{-1}C \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix} E_m \\ \cdots \\ A^{-1}CB^{-1} \end{bmatrix}.$$

或按下列格式初等变换：

$$\left[\begin{array}{c:c} C & A \\ \hdashline B & \end{array}\right]\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{变 } A \text{ 为 } E_n \text{ 的}}\left[\begin{array}{c:c} A^{-1}C & E_n \\ \hdashline B & \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{初等列变换}]{\text{变 } B \text{ 为 } E_m \text{ 的}}\left[\begin{array}{c:c} X=A^{-1}CB^{-1} & E_n \\ \hdashline E_m & \end{array}\right].$$

例 6 设 $AXB=C$，求矩阵 X，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},C=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

解法一 $[A \vdots C]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\left[\begin{array}{ccc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right],$

故
$$XB=A^{-1}C=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

又
$$\begin{bmatrix} B \\ \cdots \\ A^{-1}C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ \cdots & \cdots \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{列变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \cdots & \cdots \\ -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix},$$

故
$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 10 & -4 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}.$$

解法二 $\begin{bmatrix} C & \vdots & A \\ \cdots & & \cdots \\ B & \vdots & \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ \hdashline 2 & 1 & & & \\ 5 & 3 & & & \end{array}\right]$

$$\xrightarrow[\text{初等行变换}]{\text{变 } A \text{ 为 } E_3 \text{ 的}}\left[\begin{array}{cc:ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 2 & 1 & & & \\ 5 & 3 & & & \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{初等列变换}]{\text{变 } B \text{ 为 } E_2 \text{ 的}}\left[\begin{array}{cc:ccc} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \end{array}\right],$$

所求结果与解法一相同.

方法二 求逆法

如果 X 前后的系数矩阵 A,B 的逆矩阵易求出,用 A^{-1}左乘,或用 B^{-1}右乘,或同时用 A^{-1}左乘、B^{-1}右乘方程两端可求出 X.

当系数矩阵为 2 阶可逆矩阵,或为分块可逆矩阵,或为初等矩阵时,因其逆矩阵容易求出(参阅 §2.3、§2.9 及 §2.15),常用求逆法求其解 X.求解联立矩阵方程时,也常用求逆法求解.

例 7[2.12(4)] 解矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

解 设 X 前后的系数矩阵分别为 A、B,方程右端之矩阵为 C. 显然 A、B 均为分块对角矩阵,其逆矩阵分别为

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & B_1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \\ & B_1^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

用 A^{-1}左乘，B^{-1}右乘原方程两端，得到

$$X=A^{-1}CB^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\1 & 3 & -4\\1 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

例 8 解矩阵方程$\begin{cases}AX+BY=P;\\CX+DY=Q,\end{cases}$其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}0 & -1\\2 & -3\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}2 & 3\\-6 & -13\end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix}9 & 4\\4 & 3\end{bmatrix},\qquad Q=\begin{bmatrix}1 & -2\\6 & 4\end{bmatrix}.$$

解 显然 A,C 可逆，则

$$X+A^{-1}BY=P,X+C^{-1}DY=C^{-1}Q.$$

上两式相减，得到$(A^{-1}B-C^{-1}D)Y=A^{-1}P-C^{-1}Q$，而

$$A^{-1}B-C^{-1}D=\begin{bmatrix}23/3 & 12\\5/3 & 3\end{bmatrix},$$

$$A^{-1}P-C^{-1}Q=\begin{bmatrix}19/6 & -10/3\\2/3 & -4/3\end{bmatrix},$$

将它们代入上式得 Y，再将 Y 代回原方程得 X：

$$Y=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}9 & 36\\-1 & -28\end{bmatrix},X=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}70 & -2\\-3 & 24\end{bmatrix}.$$

方法三 待定元素法

当所求矩阵 X 前面的系数矩阵不是方阵，或是方阵但不可逆时，常用待定元素法，求出矩阵 X.

例 9 解矩阵方程

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{bmatrix}.$$

解 X 前面系数矩阵不可逆，用待定元素法求之. 设

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\4 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{bmatrix},$$

以 X 的一列待求元素为未知数，写出方程组分别为

$$\begin{cases}2x_1-3x_3=2,\\4x_1-6x_3=4.\end{cases}\quad \text{解之得 } x_1=1+(3/2)x_3 \ (x_3\text{ 为任意数})；$$

$$\begin{cases}2x_2-3x_4=3,\\4x_2-6x_4=6.\end{cases}\quad \text{解之得 } x_4=-1+(2/3)x_2 \ (x_2\text{ 为任意数}).$$

故所求矩阵 $X=\begin{bmatrix}(3/2)x_3+1 & x_2\\x_3 & (2/3)x_2-1\end{bmatrix}$（$x_2,x_3$ 为任意数）.

例 10 解方程

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}.$$

解法一 X 的系数矩阵是长方阵，用待定元素法求出 X. 由上矩阵方程可知，X 为 3×2 矩阵，设

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\\x_5 & x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}.$$

以 X 的一列待求元素为未知数，写出方程组分别为

$$\begin{cases}x_1+2x_3-3x_5=3;\\x_1+x_3-x_5=2.\end{cases}\quad \text{解之得}\begin{cases}x_3=3-2x_1;\\x_5=1-x_1.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_2+2x_4-3x_6=-1;\\x_2+x_4-x_6=0.\end{cases}\quad \text{解之得}\begin{cases}x_4=1-2x_2;\\x_6=1-x_2.\end{cases}$$

故所求矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\3-2x_1 & 1-2x_2\\1-x_1 & 1-x_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\3&1\\1&1\end{bmatrix}+x_1\begin{bmatrix}1&0\\-2&0\\-1&0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0&1\\0&-2\\0&-1\end{bmatrix},$$

其中 x_1,x_2 为任意数.

解法二 如以 X 中 6 个待定元素为未知数,设 $X=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}$,由所给方程得到

$$\begin{cases}x_{11}+2x_{21}-3x_{31}+0x_{12}+0x_{22}+0x_{32}=3,\\0x_{11}+0x_{21}+0x_{31}+x_{12}+2x_{22}-3x_{32}=-1,\\x_{11}+x_{21}-x_{31}+0x_{12}+0x_{22}+0x_{32}=2,\\0x_{11}+0x_{21}+0x_{31}+x_{12}+x_{22}+x_{32}=2.\end{cases}$$

由
$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3&0&0&0&3\\0&0&0&1&2&-3&-1\\1&1&-1&0&0&0&2\\0&0&0&1&1&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}$$

$$\overline{A}_1=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&1\\0&1&-2&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&1&1\\0&0&0&0&1&-2&-1\end{bmatrix}.$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_{11}+0x_{21}+x_{31}=1,\\x_{21}-2x_{31}=1,\\x_{12}+x_{32}=1,\\x_{22}-2x_{32}=-1,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}x_{11}=1-x_{31},\\x_{21}=1+2x_{31},\\x_{12}=1-x_{32},\\x_{22}=-1+2x_{32},\end{cases}$$

故所求的矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}1-x_{31}&1-x_{32}\\1+2x_{31}&2x_{32}-1\\x_{31}&x_{32}\end{bmatrix}(x_{31},x_{32}\text{为任意实数}).$$

或由 $\overline{A}_1$ 写出方程组的通解：

$$[x_{11},x_{21},x_{31},x_{12},x_{22},x_{32}]^{\mathrm{T}}=[1,1,0,1,-1,0]^{\mathrm{T}}$$

$$+k_1[-1,2,1,0,0,0]^{\mathrm{T}}+k_2[0,0,0,-1,2,1]^{\mathrm{T}}$$

于是

$$x_{11}=1-k_1,\quad x_{12}=1-k_2,$$

$$x_{21}=1+2k_1,\quad x_{22}=2k_2-1,$$

$$x_{31}=k_1,\quad x_{32}=k_2,$$

故所求矩阵为

$$X=\begin{bmatrix}1-k_1 & 1-k_2\\ 1+2k_1 & 2k_2-1\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}(k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

由上两解法可知，为简便求出 X 中的待求元素，解 $AX=B$ 时，应分别以 X 的一列待求元素为未知数写出方程组解之；而解 $XA=B$ 时，应分别以 X 的一行待求元素为未知数解之.

方程 $AX=B$ 中，如 A 和(或)B 的元素含参数时，要讨论参数取何值时，方程有解，无解.

例 11 设 a,b 为任意数，解下列矩阵方程：

$$\begin{bmatrix}a+1 & 1\\ a+4 & a\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}b-1 & -b-a\\ -b+a & b\end{bmatrix}.$$

解 令 $A=\begin{bmatrix}a+1 & 1\\ a+4 & a\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}b-1 & -b-a\\ -b+a & b\end{bmatrix}$，

$$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}.$$

因 $|A|=a^2-4$，故

(1)当 $a\neq\pm2$ 时，A 为可逆矩阵，上方程有唯一解，其解为

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{a^2-4}\begin{bmatrix}a & -1\\ -a-4 & a+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b-1 & -b-a\\ -b+a & b\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2-4}\begin{bmatrix}ab+b-2a & -ab-b^2-b\\ a^2-2ab+2a-5b+4 & a^2+2ab+4a+5b\end{bmatrix}.$$

(2)当 $a=\pm2$ 时，则 $|A|=0$，$|B|=a^2-b=4-b$.

(a)若 $b\neq 4$ 时，则 $|B|\neq 0$，而 $|A|=0$，故秩 $A\neq$ 秩$[A, B]$，于是上方程无解.

(b)若 $b=4$，且 $a=2$ 时，将上方程左端乘开，比较对应元素，得到

$$3x_1+0x_2+x_3+x_4=3;$$
$$6x_1+0x_2+2x_3+0x_4=-2;$$
$$0x_1+3x_2+0x_3+x_4=-6;$$
$$0x_1+6x_2+0x_3+x_4=4.$$

因其系数矩阵的秩等于 1，而增广矩阵的秩等于 2，故上方程组，即原矩阵方程无解.

(c)若 $b=4$，且 $a=-2$ 时，易得

$$-x_1+0x_2+x_3+0x_4=3;$$
$$2x_1+0x_2-2x_3+0x_4=-6;$$
$$0x_1-x_2+0x_3+x_4=-2;$$
$$0x_1+2x_2+0x_3-2x_4=4.$$

其解为

$$X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 3+x_1 & x_2-2 \end{bmatrix}\text{（其中 } x_1, x_2 \text{ 为任意数）}.$$

法四　解方程组法

对于未知数含于各个矩阵中的矩阵方程，常令其左、右两端矩阵的对应元素相等，得一线性方程组，用解线性方程组的方法，即可求得未知数.

例 12　解下列矩阵方程（其中 x, y, z, w 为未知数）：

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z & y \\ x & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y & z \\ w & -w \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} w & w \\ y & z \end{bmatrix}.$$

解上矩阵方程可化为

$$\begin{bmatrix} x+y+2x & x+y+2w \\ x+y+3z & 4y+w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y+2w & z+2w \\ w+2y & 2z-w \end{bmatrix}.$$

令其对应元素相等，得到线性方程组：

$$3x-y+z-2w=0,\quad x-y+3z-w=0,$$
$$x+y-z=0,\quad 4y-2z+2w=0.$$

因 $\overline{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 1/2\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，

方程组的通解为

$$[x,y,z,w]^{\mathrm{T}}=k[1/2,-1/2,0,1]\ (k\text{ 为任意常数}),$$

故所求矩阵方程的解为

$$x=k/2,y=-k/2,z=0,w=k\ (k\text{ 为任意常数}).$$

习　　题　4.8

1. 解下列矩阵方程：

(1) $(A+2G)X=C$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},G=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(2) $AXB=C$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 5\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(3) $XA=B$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$$

2. 解下列矩阵方程组：

$$\begin{cases}AX+BY=F,\\ CX+DY=G.\end{cases}$$

其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix},$

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}1 & -2\\5 & 4\end{bmatrix}.$$

3. 解下列矩阵方程

(1) $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$, (2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$.

§4.9 两类满足给定条件的所有矩阵的求法

下面介绍两类满足给定条件的所有矩阵的求法.

(一)满足所给矩阵等式的所有矩阵的求法

常用的方法是解方程组法. 该法使用的步骤是:

将所求矩阵的元素设为待求元素,代入所给矩阵等式中,根据矩阵相等的定义,比较对应元素,得到待求元素所满足的(线性)方程组,解此方程组即可求出待求元素和(或)所满足的关系.

例 1[2.6(2)] 求出满足 $A^2=A$ 的一切二阶方阵 A.

解 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$($a,b,c,d$ 待求),则

$$A^2=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix}.$$

将 A 及 A^2 代入所给矩阵等式,得到

$$\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}.$$

比较对应元素,得到待求元素所满足的方程组:

$$\begin{cases}a^2+bc=a\\ab+bd=b\\ac+cd=c\\bc+d^2=d\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}a^2-a+bc=0 & (4.9.1)\\(a+d-1)b=0 & (4.9.2)\\(a+d-1)c=0 & (4.9.3)\\d^2-d+bc=0 & (4.9.4)\end{cases}$$

(i)如 $a+d-1=0$ 即 $a+d=1$,由(4.9.2),(4.9.3)式知,b,c

为任意常数.由(4.9.1)及(4.9.4)式知,a 和 d 可用 b,c 表示:

$$a=(1\pm\sqrt{1-4bc})/2 \tag{4.9.5}$$

$$d=(1\pm\sqrt{1-4bc})/2 \tag{4.9.6}$$

注意到 $a+d=1$,这时 A 可取下列形状:

$$A=\begin{bmatrix}(1+\sqrt{1-4bc})/2 & b \\ c & (1-\sqrt{1-4bc})/2\end{bmatrix}; \tag{4.9.7}$$

或 $$A=\begin{bmatrix}(1-\sqrt{1-4bc})/2 & b \\ c & (1+\sqrt{1-4bc})/2\end{bmatrix}, \tag{4.9.8}$$

其中 b,c 为任意常数.

(ii)若 $a+d-1\neq 0$,即 $a+d\neq 1$,由(4.9.2),(4.9.3)式可知 $b=c=0$.又由(4.9.5)式知 $a=1$,或 $a=0$.由(4.9.6)式知 $d=1$ 或 $d=0$.由于 $a+d\neq 1$,故只能 $a=1,d=1;a=0,d=0$,故

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}(a=d=1,a+d=2\neq 1); \tag{4.9.9}$$

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}(a=0,d=0,a+d=0+0=0\neq 1). \tag{4.9.10}$$

综上所述,满足 $A^2=A$ 的所有二阶矩阵共有四种形式,为(4.9.7)式,(4.9.8)式,(4.9.9)式,(4.9.10)式中的四类矩阵.

(二)与已知矩阵可交换的所有矩阵的求法

常用方法有三种,一是解方程组法;二是取特殊矩阵法;三是拆分法(将已知矩阵拆分为单位矩阵与另一矩阵之和).

例 2 设 A 为二阶矩阵,$B=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}$,满足 $AB=BA$,又 $A^2=\begin{bmatrix}8 & 6 \\ -6 & 8\end{bmatrix}$,求 A.

解 设 $A=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$,由 $AB=BA$ 得到

$$\begin{bmatrix}-x_2 & x_1 \\ -x_4 & x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3 & x_4 \\ -x_1 & -x_2\end{bmatrix}.$$

比较对应元素，有 $x_3=-x_2, x_4=x_1$，于是满足 $AB=BA$ 的所有矩阵 A 为

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}(x_1, x_2 \text{ 为任意常数}).$$

又由题设，有

$$A^2=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^2-x_2^2 & 2x_1x_2 \\ -2x_1x_2 & x_1^2-x_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$$

比较对应元素，得到

$$x_1^2-x_2^2=8, \quad 2x_1x_2=6.$$

由上面第 2 式可知 $x_1\neq 0$，将 $x_2=3/x_1$ 代入第 1 式得

$$x_1^4-8x_1^2-9=0 \text{ 即 } (x_1^2)^2-8(x_1^2)-9=(x_1^2-9)(x_1^2+1)=0,$$

故 $x_1^2=9$ 或 $x_1^2=-1$（舍去），从而 $x_1=\pm 3, x_2=\pm 1$，于是

当 $x_1=3, x_2=1$ 时，所求的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$；

当 $x_1=-3, x_2=-1$ 时，所求的矩阵为 $A=\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

易验证有 $A^2=\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}$，且满足 $AB=BA$.

例 3 设 $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq a_j (i\neq j)$，证明与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证 任何对角矩阵 $X=\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$，显然与 A 可交换，因为

$$AX=XA=\begin{bmatrix} a_1x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2x_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_nx_n \end{bmatrix}.$$

反之,设任意矩阵 $B=[b_{ij}]_{n\times n}$与 A 可交换,下证 B 只能是对角矩阵. 事实上,由 $AB=BA$,得到

$$\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{bmatrix}.$$

比较对应元素(第 i 行,第 j 列元素)得到

$$a_ib_{ij}=a_jb_{ij} \quad 即 \quad (a_i-a_j)b_{ij}=0.$$

当 $i\neq j$ 时,有 $a_i\neq a_j$,故 $b_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n$,且 $i\neq j)$,即 B 为对角矩阵.

例 4 如果 n 阶矩阵 A 与所有 n 阶矩阵可交换,那么 A 一定是数量矩阵.

证 因 A 与所有 n 阶矩阵可交换,当然与某些特殊的 n 阶矩阵也能交换. 本例可用取特殊矩阵的方法证明 A 必为数量矩阵.

取特殊矩阵

$$B=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{bmatrix} 及 C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}.$$

因 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$同 B 及 C 可交换,由 $AB=BA$,可得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 2a_{12} & \cdots & na_{1n} \\ a_{21} & 2a_{22} & \cdots & na_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 2a_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & \cdots & 2a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na_{n1} & na_{n2} & \cdots & na_{nn} \end{bmatrix},$$

从而 $ja_{ij}=ia_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，于是当 $i\neq j$ 时，有 $a_{ij}=0$，故

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

又由 $AC=CA$，得到

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \\ a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \\ a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

比较对应元素得到

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn},$$

即 A 为数量矩阵.

例 5 设 $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求所有与 A 可交换的矩阵.

解 凡主对角线上元素全部相同的矩阵总可拆分为一个同阶数量矩阵与另一个同阶矩阵之和. 事实上

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=2E+B.$$

因数量矩阵 $2E$ 与任意矩阵可交换，为求与 A 可交换的所有矩阵，只须求出与另一矩阵 B 可交换的所有矩阵即可. 因 B 的元素较 A 简单，用这种拆分法可简化计算. 事实上，设 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$，由 $BX=XB$，得到

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_3 & x_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $x_1=x_4,x_3=0$. 于是与 A 可交换的所有矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}(x_1,x_2 \text{ 为任意常数}).$$

习　　题 4.9

1. 求满足 $A^2=E$ 的所有 2 阶矩阵.

2. 求与 $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ 可交换的矩阵 X.

§4.10　与乘积矩阵为零矩阵有关的三问题的解(证)法

问题一:已知矩阵 A,证明存在矩阵 C,使 $AC=O$ 或 $CA=O$.

为证明存在矩阵 C,使 $AC=O$,常将 C 按列分块 $C=[C_1,C_2,\cdots,C_n]$,且将列向量 C_i 视为 $AX=0$ 的解向量,即

$$AC=A[C_1,C_2,\cdots,C_n]=O\leftrightarrow AC_i=0$$

$$\leftrightarrow C_i \text{ 为 } AX=0 \text{ 的解向量}(i=1,2,\cdots,n),$$

因而,可用 $AX=0$ 的一些解或一个基础解系充当所求矩阵 C 的部分列向量,C 的其余列向量可取为零向量.

为证明存在矩阵 C,使 $CA=O$ 常将 C 按行分块,且将行向量视为 $X^TA=0$ 的解向量,即

$$CA=\begin{bmatrix} \widetilde{C}_1 \\ \cdots \\ \widetilde{C}_n \end{bmatrix}A=\begin{bmatrix} \widetilde{C}_1A \\ \cdots \\ \widetilde{C}_nA \end{bmatrix}=\leftrightarrow \widetilde{C}_iA=0$$

$$\leftrightarrow \widetilde{C}_i \text{ 为 } X^TA=0 \text{ 的解向量}(i=1,2,\cdots,n).$$

因而可用 $X^TA=0$ 的一些解或一个基础解系作为所求矩阵 C 的部分行向量,C 的其余行向量可取为零向量.

例 1 设 n 阶矩阵 A 的秩为 r,证明存在秩为 $n-r$ 的方阵 C,使 $AC=O$.

解 秩 $A=r$,故 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系所含解向量的个数为 $n-r$.

如果秩 $A=r=n$,则 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解. 取 $C=O$,则 C 满足 $AC=O$,且秩 $C=0=n-r$.

如果秩 $A=r<n$,取 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-r}$,以这 $n-r$ 个解向量为部分列向量,再添上 r 个零向量,作为矩阵 C,则 C 满足 $AC=0$,且秩 $C=n-r$,故 C 即为所求.

例 2 n 阶矩阵 $A\neq O$,试证存在一个非零 n 阶矩阵 B,使 $AB=O$ 的充要条件是行列式 $|A|=0$.

证 先证必要性. 证明一设 $B=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]$,则

$$AB=A[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n]=[A\boldsymbol{B}_1,A\boldsymbol{B}_2,\cdots,A\boldsymbol{B}_n]=O.$$

因而 $A\boldsymbol{B}_j=\mathbf{0}(j=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{B}_j$ 为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量.

又 $B\neq O$,故 B 中至少有一列向量 $\boldsymbol{B}_i\neq\mathbf{0}$,使 $A\boldsymbol{B}_i=\mathbf{0}$,即 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解. 由 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解的必要条件知 $|A|=0$.

必要性证明二 如 $|A|\neq 0$,则 A 可逆. 由 $AB=O$ 得到 $B=O$,与题设 $B\neq O$ 矛盾,故 $|A|=0$.

下证充分性 因 $|A|=0$,故 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解. 任取其一非零解 $\boldsymbol{B}_1$,则有 $A\boldsymbol{B}_1=\mathbf{0}$,令 $B=[\boldsymbol{B}_1,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]$,则有 $B\neq O$,且 B 中每个列向量都是 $AX=\mathbf{0}$ 的解,即

$$AB=A[\boldsymbol{B}_1,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]=[A\boldsymbol{B}_1,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]=O,$$

于是 n 阶矩阵 B 即为所求. 证毕.

注意 证充分性是证存在一非零矩阵满足 $AB=O$,这时不必求出 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系. 事实上可任选一个非零解向量充当 B 的列向量,保证 $B\neq O$ 就行了. 对矩阵 B 如上(或下)例那样,还有秩的要求,那就必须取基础解系中的部分或全部解向量充当 B 的列向量了.

例 3 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,秩为 m,B 为 $n\times(n-m)$ 矩阵,秩为

$n-m$，又已知 $AB=O$，α 是满足 $AX=0$ 的一个 n 维向量，证明存在唯一的一个 $n-m$ 维列向量 β，使 $\alpha=B\beta$.

证 设 $B=[\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_{n-m}]$，由 $AB=O$ 可知，$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_{n-m}$ 是 $AX=0$ 的解向量. 又因秩 $B=n-m$，故它们线性无关，而 $AX=0$ 的一个基础解系所含解向量的个数为 $n-m$，故 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_{n-m}$ 为 $AX=0$ 的一个基础解系，于是解向量 α 可写成它们的线性组合，设

$$\alpha=k_1\boldsymbol{B}_1+k_2\boldsymbol{B}_2+\cdots+k_{n-m}\boldsymbol{B}_{n-m}=B\beta,$$

其中 $\beta^{\mathrm{T}}=[k_1,k_2,\cdots,k_{n-m}]$. 由命题 3.1.2 知列向量 β 唯一.

问题二 已知 $AB=O$，证 $A=O$（或 $B=O$）.

法一 证 A（或 B）的行（或列）向量为零向量，常证 $X^{\mathrm{T}}B$（或 $AX=0$）只有零解，为此证明秩 $B=X^{\mathrm{T}}$ 的维数（或秩 $A=X$ 的维数）；或证 B 的行向量（或 A 的列向量）组线性无关.

例 4 设 B 为 r 阶方阵，C 为 $r\times n$ 矩阵，证明当且仅当 C 的秩为 r 时，

1）若 $BC=O$，则 $B=O$；2）若 $BC=C$，则 $B=E$.

证 1）**证明一** 设 B 的 r 个行向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，由 $BC=O$ 知，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 $X^{\mathrm{T}}C=0$ 的解向量. 因当且仅当秩 $C=r=X^{\mathrm{T}}$ 的维数时，$X^{\mathrm{T}}C=0$ 只有零解，从而 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$，$B=O$.

1）**证明二** 由 $BC=O$，得到 $C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}=O$，这说明 B^{T} 的 r 个列向量，即 B 的 r 个行向量为 $C^{\mathrm{T}}X=0$ 的解向量. 因秩$(C^{\mathrm{T}})=$秩 $C=r=X$ 的维数，故 $C^{\mathrm{T}}X=0$ 只有零解，于是 B^{T} 的 r 个列向量都是零向量，故 $B^{\mathrm{T}}=O$，即 $B=O$.

1）**证明三** 设 $B=[b_{ij}]_{r\times r}$，$C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}$，由题设有

$$\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{r1} & \cdots & b_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_r\end{bmatrix}=O.$$

由此得到 $b_{i1}\alpha_1+b_{i2}\alpha_2+\cdots+b_{ir}\alpha_r=\mathbf{0}$. 因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，故 $b_{i1}=b_{i2}=\cdots=b_{ir}=0(i=1,2,\cdots,r)$，从而 $B=O$.

2)**证明一** 由 1)的结论及$(B-E)C=O$，即得 $B-E=O$，即 $B=E$.

2)**证明二** 由 $BC=C$ 得$(B-E)C=O$，因而 $B-E$ 的所有行向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 为 $X^{\mathrm{T}}C=0$ 的解向量，而秩 $C=r=X^{\mathrm{T}}$ 的维数，故 $X^{\mathrm{T}}C=O$ 只有零解. 或因秩 $C=r$，C 的 r 个行向量线性无关，由线性无关定义得到 $X^{\mathrm{T}}C=O$ 只有零解. 于是 $\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_r=\mathbf{0}$，即 $B-E=O$ 亦即 $B=E$.

例 5 已知 A,B,C 分别为 $m\times n,n\times p,p\times s$ 矩阵，且秩$(kA)=n$，秩 $C=p$，$ABC=O$，试证 $B=O$.

证 因秩 $A=n=A$ 的列数$=X$ 的维数，故 $AX=\mathbf{0}$ 只有零解. 而 BC 的 s 个列向量显然由 $ABC=O$ 可知为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，故这 s 个列向量均为零向量，即 $BC=O$.

再考察方程 $X^{\mathrm{T}}C=\mathbf{0}$，因秩 $C=p=C$ 的行数$=X^{\mathrm{T}}$ 的维数，故 $X^{\mathrm{T}}C=\mathbf{0}$ 只有零解，而 B 的 n 个行向量为 $X^{\mathrm{T}}C=\mathbf{0}$ 的解向量，故 $B=O$. 证毕

因只有零向量才与自身正交；只有零向量才与任意向量正交，故得到证明 A 为零矩阵的下列方法：

法二 证 A 的各行(或列)向量自身正交，或与任意向量正交

例 6 设 A 为 n 阶实矩阵，如果 $AA^{\mathrm{T}}=O$，则 $A=O$.

证 由 $AA^{\mathrm{T}}=O$ 可知，A^{T} 的列向量即 A 的行向量为 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，又因解向量与 A 的行向量正交，于是 A 的各个行向量自身正交，因而 A 的各行行向量均为零向量，故 $A=O$.

法三 为证 $A=O$，可证秩 $A=O$.

为此常证 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系含 n 个解向量.

例 7 设 A 是 n 阶矩阵，且对任意 n 维列向量 X 都有 $AX=\mathbf{0}$，则 $A=O$.

证明一 由题设，任意 n 维向量都是 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，而全

体 n 维向量组成的向量组，其秩为 n，因而 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系含 n 个解向量，由

$$n-\text{秩}\,A=n(\text{基础解系所含解向量个数}),$$

得到秩 $A=0$，从而 $A=O$.

证明二 因任意 n 维向量都是 $AX=\mathbf{0}$ 的解向量，故 A 的各行行向量与任意 n 维向量正交，因而 A 的各行向量必为零向量，所以 $A=O$.

问题三 已知 $AB=O$，求有关矩阵的秩的大小.

已知 $AB=O$，求有关矩阵的秩的大小问题，常用(2.14.4)式求之. 详见§2.14 例 6，例 8，§2.13 例 6，例 8. 再举一例说明.

例 8 设 $A=[a_{ij}]_{p\times p}$，$B=[b_{ij}]_{p\times q}$，且秩 $B=p$. 如果 $AB=O$，则

$$\text{秩}\,A=0.$$

解法一 由(2.14.4)式知秩 $A+$秩 $B\leqslant p$，又已知秩 $B=p$，故

$$0\leqslant\text{秩}\,A\leqslant p-\text{秩}\,B=p-p=0,\text{即秩}\,A=0.$$

解法二 要证秩 $A=0$，只须证 $A=O$.

考虑方程组 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$，其中 $X^{\mathrm{T}}=[x_1,x_2,\cdots,x_p]^{\mathrm{T}}$. 因秩 $B=p=X$ 的维数，故 $X^{\mathrm{T}}B=\mathbf{0}$ 只有零解. 而 A 的 p 个行向量均为其解，所以 A 的 p 个行向量均为零向量，因而 $A=O$，于是秩 $A=0$.

解法三 考虑 p 个未知量的齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$. 如能证其基础解系含 $n-r=p-$秩 $A=p$ 个解向量，则有秩 $A=0$. 事实上，设 $B=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q]$，其中 $\boldsymbol{\beta}_i$ 为 B 的第 i 个列向量($i=1,2,\cdots,q$). 由

$$AB=[A\boldsymbol{\beta}_1,A\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,A\boldsymbol{\beta}_q]=O\text{ 得 }A\boldsymbol{\beta}_i=\mathbf{0}(i=1,2,\cdots,q).$$

故 B 的列向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 是含 p 个未知量的方程组 $AX=\mathbf{0}$ 的 q 个解向量. 因秩 $B=p$，故向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 的一个最大无关组含 p 个向量，它是 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系所含的解向量，故 $n-r=p$，即

$$n-r=p-\text{秩}\,A=p,\text{亦即秩}\,A=0.$$

习　　题　4.10

1. 设 A,B 为 n 阶矩阵，试证对任意 A 必存在一矩阵 B，使秩 $A+$ 秩 $B=n$，且 $AB=O$ 成立.

2. 求两个不相等的非零矩阵 B,C 使 $AB=CA=O$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

3. 设 A 是秩为 r 的 n 阶方阵，证明存在秩为 $n-r$ 的 n 阶方阵 B 与 C，使 $AB=CA$.

4. 设 P 为 m 阶方阵，Q 是 $n\times m$ 矩阵，且秩 $Q=m$，如果 $Q=QP$，则 $P=E$.

5. 如果 A 是实对称矩阵，且 $A^2=O$，则 $A=O$.

6. 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，若 $A^{T}A=O$，则 $A=O$.

7. 若 n 阶矩阵 A 是降秩的，试证必存在非零的 n 阶矩阵 C 和 B，使 $AB=O$，$CA=O$.

第五章　矩阵的特征值和特征向量

§5.1　特征值的求法和证法

(一)元素已知的矩阵的特征值求法

矩阵 A 的元素为具体数字时，其特征值求法比较简单，只须求出特征方程 $|\lambda E-A|=0$(或 $|A-\lambda E|=0$)的根即可. 为避免由于不能将三次或三次以上 λ 的多项式 $|\lambda E-A|$ 分解成 λ 的一次因式的乘积，而求不出特征值的窘况，务必留心 §4.4 例 4 下面的注意.

例 1[5.4(2)]　求下列矩阵 A 的特征值和特征向量，并问其特征向量是否两两正交，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 3 & 6\end{bmatrix}.$$

解　为求 A 的特征值，将 $|\lambda E-A|$ 分解成 λ 的一次因式的乘积，为此将 $|\lambda E-A|$ 中某个元素(例如第三行第 1 列处元素)消成零，提取 λ 的一次因式：

$$|\lambda E-A|=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -3\\ -2 & \lambda-1 & -3\\ -3 & -3 & \lambda-6\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+(-1)c_2}\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & -3\\ -\lambda-1 & \lambda-1 & -3\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ -1 & \lambda-1 & -3\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & \lambda-3 & -6\\ 0 & -3 & \lambda-6\end{bmatrix}$$

$$=(\lambda+1)[(\lambda-3)(\lambda-6)-8]=(\lambda+1)(\lambda-9)\lambda,$$

故 A 的三个特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=9,\lambda_3=0$.

解 $(\lambda_1 E-A)X=\mathbf{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1=[1,-1,0]^{\mathrm{T}}$;

解 $(\lambda_2 E-A)X=\mathbf{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=[1,1,2]^{\mathrm{T}}$;

解 $(\lambda_3 E-A)X=\mathbf{0}$ 得线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_3=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

因 A 为实对称矩阵,属不同特征值的特征向量两两正交.

例 2[1999 年 1]　设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1,则 A 的 n 个特征值是______.

解　$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & \cdots & -1\\ -1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_1+c_i}\begin{vmatrix}\lambda-n & -1 & \cdots & -1\\ \lambda-n & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda-n & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & -1 & \cdots & -1\\ 1 & \lambda-1 & \cdots & -1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & -1 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & \lambda\end{vmatrix}\begin{pmatrix}\text{去掉与第}\\ \text{1 列成比}\\ \text{例的分量}\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda-n)\lambda^{n-1},$$

由 $(\lambda-n)\lambda^{n-1}=0$ 得到 A 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$.

例 3[1989 年 4,5] 设 $A=\begin{bmatrix}-1&2&2\\2&-1&-2\\2&-2&-1\end{bmatrix}$,(1)试求 A 的特征值;(2)利用(1)的结果,求矩阵 $E+A^{-1}$的特征值,其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解 (1) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1&-2&-2\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda-1&0\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&0\\-2&\lambda+1&2\\-2&2&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+(-1)c_1}(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda+3&2\\-2&4&\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)[(\lambda+3)(\lambda+1)-8]$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+5).$$

由 $(\lambda-1)^2(\lambda+5)=0$ 得到 A 的所有特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-5$.

(2)由 A 的特征值,即得 A^{-1}的所有特征值为 $1,1,-1/5$(见例 13).由(5.1.3)式即得 $E+A^{-1}$的特征值为

$$\tilde{\lambda}_1=\tilde{\lambda}_2=1+1^{-1}=2,\tilde{\lambda}_3=1-5^{-1}=4/5.$$

或由 $\quad |E-A^{-1}|=0,|(-1/5)E-A^{-1})|=0$,得到

$$|(1+1)E-(E+A^{-1})|=0,$$

$$|(-1/5+1)E-(E+A^{-1})|=0,$$

即 $\quad |2E-(E+A^{-1})|=0,|(4/5)E-(E+A^{-1})|=0,$

故 $E+A^{-1}$的特征值为 $2,2,4/5$.

例 4[1987 年 4]　求矩阵 $A=\begin{bmatrix}-3&-1&2\\0&-1&4\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 的实特征值和对应的特征向量.

解

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda+3&1&-2\\0&\lambda+1&-4\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+2c_2]{}\begin{vmatrix}\lambda+3&1&0\\0&\lambda+1&2\lambda-2\\1&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3&1&0\\0&\lambda+1&2\\1&0&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-c_3}(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+3&1&0\\-2&\lambda+1&2\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)[(\lambda+3)(\lambda+1)+2]$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda+5).$$

实矩阵的特征值、特征向量都可能是复的. 本例只要求求出实特征值及其对应的特征向量. 显然 $\lambda=1$.

解特征方程 $(E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 得属于 $\lambda=1$ 的所有特征向量

$$\alpha=k[0,2,1]^{\mathrm{T}}\quad(k\neq0,\text{任意常数}).$$

注意　属于 $\lambda=1$ 的所有特征向量不能写成 $\alpha=[0,2,1]^{\mathrm{T}}$. 这只是其中一个.

与求特征值有关的另一类问题是矩阵 A 和(或)特征向量含参数,要求确定特征向量所对应的特征值及其所含参数. 这类命题常根据定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 写出含参数和特征值 λ 的方程组,用解方程组的方法求之.

例 5[1999 年 1,3]　设矩阵 $A=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$,其行列

式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=[-1,-1,1]^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解 由题设有 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，在此等式两端左乘 A，利用 $AA^*=|A|E$，得到

$$AA^*\alpha=\lambda_0 A\alpha,\ |A|\alpha=\lambda_0 A\alpha,\text{即 } \lambda_0 A\alpha=-\alpha,$$

亦即
$$\lambda_0\begin{bmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

于是有
$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1, \\ \lambda_0(-5-b+3)=1, \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1. \end{cases}$$

将上面第一式减去第三式得 $\lambda_0=1$，将其代入第一式，第三式分别得到 $c=a,b=-3$，再由 $|A|=-1$ 得 $\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=a-3=-1$ 即 $a=c=2,b=-3$.

例 6[1997 年 1] 已知 $\alpha=[1,1,-1]$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{bmatrix}$ 的一个特征向量，试确定参数 a,b 及特征向量 α 所对应的特征值.

解 设 α 所对应的特征值为 λ，由定义 $A\alpha=\lambda\alpha$ 即 $(\lambda E-A)\alpha=0$ 得到

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda-a & -3 \\ 1 & -b & \lambda+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\text{即}\begin{cases} \lambda-2+1+2=0, \\ -5+\lambda-a+3=0, \\ 1-b-\lambda-2=0. \end{cases}$$

解之得到 $a=-3,b=0,\lambda=-1$.

例 7[1991 年 5] 已知向量 $\alpha=[1,k,1]^T$ 是矩阵 $A=$

$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$的逆矩阵 A^{-1}的特征向量，求常数 k 的值.

解 设 λ 为 A^{-1}的对应于特征向量 α 的特征值，由定义得到 $A^{-1}\alpha=\lambda\alpha$. 这时不必急于求出 A^{-1}. 事实上在上等式两端左乘 A 得到 $AA^{-1}\alpha=\lambda A\alpha$，即 $\alpha=\lambda A\alpha$，亦即

$$\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\k\\1\end{bmatrix},$$

由此得到关于参数 k 及 λ 的方程组

$$\begin{cases}\lambda(3+k)=1;\\\lambda(2+2k)=k.\end{cases}$$

显然 $\lambda\neq0$，否则$[1,k,1]^T=[0,0,0]$，得到 $1=0$ 的矛盾. 于是将上两个方程相除，得到$(3+k)/(k+1)=2/k$，即 $k^2+k-2=(k+2)(k-1)=0$，于是得到 $k=-2$ 或 1.

(二)抽象矩阵的特征值的证法和求法

下面给出抽象矩阵的特征值的证法.

方法一 左乘矩阵法

已知矩阵 A 的一特征值 λ 及属于 λ 的一特征向量 α，欲证另一数 $f(\lambda)$为 $f(A)$的一个特征值，常在等式$A\alpha=\lambda\alpha$ 两边左乘矩阵 A 若干次，且反复利用 $A\alpha=\lambda\alpha$，其中 $f(\lambda)$与 $f(A)$分别为 λ 的多项式与 A 的多项式矩阵，即

$$f(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0,\tag{5.1.1}$$

$$f(A)=a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E.\tag{5.1.2}$$

注意 将矩阵 A 代人多项式函数 $f(\lambda)$时，常数项 a_0 要换成数量矩阵 a_0E.

欲证的数如果不是 $f(\lambda)$，而是其他与 λ 有关的数量，在等式两边左乘的矩阵应是与 A 有关的其他矩阵.

例 8 设矩阵 A 是幂等矩阵(即 $A^2=A$),试证 A 的特征值只有 0 和 1.

证 设 λ 为 A 的任一特征值,α 是 A 的属于 λ 的特征向量,即 $A\alpha=\lambda\alpha$. 在此等式两边左乘矩阵 A,得到

$$A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha.$$

因 A 是幂等矩阵,故 $A^2\alpha=A\alpha=\lambda\alpha$,于是

$$\lambda^2\alpha=\lambda\alpha,\lambda^2\alpha-\lambda\alpha=(\lambda-1)\lambda\alpha=\mathbf{0}.$$

因 $\alpha\neq\mathbf{0}$,故 $(\lambda-1)\lambda=0$,即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$.

例 9 设 A 为 n 阶方阵,如果有正整数 k 使 $A^k=0$,称 A 为幂零矩阵. 证明幂零矩阵的特征值全为零.

证 设 λ 为 A 的任一特征值,α 为 A 的属于 λ 的特征向量,在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 的两边,$k-1$ 次左乘矩阵 A,并反复利用 $A\alpha=\lambda\alpha$,得到 $A^k\alpha=\lambda^k\alpha$. 因 $A^k=0$,故 $\lambda^k\alpha=0$. 而 $\alpha\neq\mathbf{0}$,从而 $\lambda=0$. 由 λ 的任意性,例得证.

例 10 设 λ 是 n 阶方阵 A 的特征值,α 是 A 的属于 λ 的特征向量,试证 λ^m 是 A^m 的特征值,α 是 A^m 的属于 λ^m 的特征向量(m 为正整数).

证 由题意有 $A\alpha=\lambda\alpha$,在此式两端左乘矩阵 A^{m-1},反复利用 $A\alpha=\lambda\alpha$,得到

$$A^m\alpha=A(A^{m-1}\alpha)=\lambda^{m-1}A\alpha=\lambda^m\alpha.$$

上式表明 λ^m 是 A^m 的特征值,A 的属于 λ 的特征向量 α 同时是 A^m 的属于 λ^m 的特征向量.

例 11 设 λ 是 A 的一个特征值,α 是 A 的属于 λ 的特征向量,$f(\lambda)$ 是 λ 的多项式,如(5.1.1)式所示,$f(A)$ 是 A 的多项式矩阵,如(5.1.2)式所示. 试证 $f(x)$ 是 $f(A)$ 的特征值,而 α 是 $f(A)$ 的属于 $f(x)$ 的特征向量.

证 由上例结论即得

$$\begin{aligned}f(A)\alpha&=(a_nA^n+a_{n-1}A^{n-1}+\cdots+a_1A+a_0E)\alpha\\&=a_nA^n\alpha+a_{n-1}A^{n-1}\alpha+\cdots+a_1A\alpha+a_0\alpha\end{aligned}$$

$$=a_n\lambda^n\alpha+a_{n-1}\lambda^{n-1}\alpha+\cdots+a_1\lambda\alpha+a_0\alpha$$

$$=(a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\alpha=f(\lambda)\alpha. \qquad (5.1.3)$$

上式表明 $f(\lambda)$是 $f(A)$的一个特征值,α 是 $f(A)$的属于 $f(\lambda)$的特征向量.

例 12 设 A 为 $m\times n$ 矩阵,B 为 $n\times m$ 矩阵,证明 AB 和 BA 有相同的非零特征值.属于相同非零特征值的特征向量是否相同?

证 令 λ 为 BA 的一个非零特征值,α 是 BA 的属于 λ 的特征向量,则 $BA\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq\mathbf{0})$. 在此等式两端左乘矩阵 A,则

$$A(BA\alpha)=AB(A\alpha)=\lambda(A\alpha) \quad (\alpha\neq\mathbf{0}).$$

下证 $A\alpha\neq\mathbf{0}$. 事实上如 $A\alpha=\mathbf{0}$,则

$$BA\alpha=B\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}=\lambda\alpha \quad (\alpha\neq\mathbf{0}).$$

因 $\lambda\neq0$,故 $\alpha=\mathbf{0}$. 这与 $\alpha\neq\mathbf{0}$ 矛盾,所以 $A\alpha\neq\mathbf{0}$. 于是 λ 为 AB 的非零特征值,且 $A\alpha$ 是 AB 的属 λ 的特征向量.

同法可证,AB 的非零特征值 λ 也是 BA 的非零特征值,故 AB 与 BA 有相同的非零特征值. 如 β 是 AB 的属于 λ 的特征向量,则 $B\beta$ 是 BA 的属于 λ 的特征向量.

由上可知,属于 AB 与 BA 的相同非零特征值的特征向量 $A\alpha$ 与 $B\beta$ 是完全不同的,前者为 m 维向量,后者为 n 维向量.

例 13[1989 年 1,2] 设 λ 是矩阵 A 的特征值,若 A 可逆,则

1)$\lambda\neq0$; 2)λ^{-1}是 A^{-1}的特征值.

1)**证** 注意到 $A\alpha=\lambda\alpha$ 及 $|A|\neq0$ 与 $\alpha\neq\mathbf{0}$,有下述各法证明 $\lambda\neq0$.

证明一 如 $\lambda=0$,则 $\alpha=\lambda A^{-1}\alpha=\mathbf{0}$ 与 $\alpha\neq\mathbf{0}$ 矛盾;

证明二 如果 $\lambda=0$,则 $A\alpha=\mathbf{0}$,因 $\alpha\neq\mathbf{0}$,$AX=\mathbf{0}$ 有非零解 α,于是 $|A|=0$,这与 $|A|\neq0$ 矛盾;

证明三 如 $\lambda=0$,则 $|\lambda E-A|=|-A|=(-1)^n|A|=0$ 与 $|A|\neq0$ 矛盾;

证明四 因$|A|$等于 A 的所有特征值之乘积[见(5.2.7)式],如 $\lambda=0$,则 $|A|=0$,与 $|A|\neq0$ 矛盾.

2)**证** 在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两边左乘 A^{-1}，得到 $\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$，即 $A^{-1}\alpha=\lambda^{-1}\alpha$，故 λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值.

方法二 利用相似矩阵和转置矩阵的特征值性质证明：

(1)矩阵与其转置矩阵有相同的特征值；

(2)相似矩阵有相同的特征值.

例 14[5.6] A,B 为 n 阶矩阵，当 A 可逆时，证明 AB 与 BA 有相同的特征值.

证明一 A 可逆时，有 $BA=A^{-1}(AB)A$，即 BA 与 AB 为相似矩阵，故 AB 与 BA 有相同的特征值.

证明二 证 AB 与 BA 有相同的特征多项式. 因 A 可逆，故

$$
\begin{aligned}
|\lambda E-AB| &= |A|^{-1}|A||\lambda E-AB| \\
&= |A^{-1}||\lambda E-AB||A| = |A^{-1}(\lambda E)A-A^{-1}(AB)A| \\
&= |\lambda EA^{-1}A-(A^{-1}A)BA| = |\lambda E-BA|.
\end{aligned}
$$

例 15 设 λ_0 是方阵 A 的特征值，证明 λ_0 也是 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

证 设 $B=P^{-1}AP$. 因 B 与 A 相似，故 λ_0 也是 B 的特征值. 又 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}$，因 B 和 B^{T} 的特征值相同，故 B 的特征值 λ_0 也是 B^{T} 即是 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 的特征值.

例 16 证明如果 λ 是正交矩阵 A 的特征值，那么 λ^{-1} 也是 A 的特征值.

证明一 设 A 的属于 λ 的特征向量为 α，则 $A\alpha=\lambda\alpha$. 因 A 为正交矩阵，$A^{\mathrm{T}}A=E$，故 A 为可逆阵，由本节例 13 知，$\lambda\neq0$. 在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两端左乘矩阵 A^{T}，得到 $(A^{\mathrm{T}}A)\alpha=\lambda A^{\mathrm{T}}\alpha$，即 $A^{\mathrm{T}}\alpha=\lambda^{-1}\alpha$，因而 λ^{-1} 为 A^{T} 的特征值. 因 A 与 A^{T} 有相同的特征值，所以 λ^{-1} 为 A 的特征值.

证明二 A 为正交矩阵，$A=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$，由本节例 13，λ^{-1} 为 A^{-1} 的特征值，又 A^{-1} 与其转置矩阵 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ 的特征值相同，故 λ^{-1} 为 $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$ 即为 A 的特征值.

证法三 下证 $|\lambda^{-1}E-A|=0$. 由 $AA^{\mathrm{T}}=E$，得到

$$\lambda E-A=\lambda AA^{T}-A=\lambda A(A^{T}-\lambda^{-1}E)$$

因 $|\lambda E-A|=0$，故 $|\lambda A||A^{T}-\lambda^{-1}E|=|\lambda E-A|=0$. 又因 $\lambda\neq 0$，$|A|\neq 0$，故 $|\lambda A|=\lambda^{n}|A|\neq 0$，从而 $|A^{T}-\lambda^{-1}E|=0$. 而

$$\begin{aligned}|A^{T}-\lambda^{-1}E|&=|(A-\lambda^{-1}E)^{T}|\\&=|A-\lambda^{-1}E|=(-1)^{n}|\lambda^{-1}E-A|\end{aligned}$$

所以 $|\lambda^{-1}E-A|=0$.

方法三 证一数为特征值，可证该数为特征多项式的根.

如能证明 λ_0 为特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 的根，即如能证 $f(\lambda_0)=|\lambda_0 E-A|=0$，则 λ_0 为 A 的一个特征值.

例 17 设 A 为 n 阶矩阵，试证齐次线性方程组 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解的充要条件是 A 有零特征值.

证明一 先证必要性. 因 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解，故 $|A|=0$. 因而

$$|0E-A|=|-A|=(-1)^{n}|A|=0,$$

所以数 0 是 A 的特征值.

再证充分性. 因 0 为 A 的特征值，故

$$0=|0E-A|=|-A|=(-1)^{n}|A|,$$

所以 $|A|=0$，因而 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解.

证明二 利用 § 2.5 习题 3 的结论证之. 读者自行完成.

例 18[1989 年 1，2] 假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值. 证明(1)$1/\lambda$ 为 A^{-1} 的特征值；

(2)$|A|/\lambda$ 为 A 的伴随矩阵 A^{*} 的特征值.

证 (1)的证明见例 13. 下只证(2)成立.

(2)**证明一** 因 λ 为 A 的特征值，故 $|\lambda E-A|=0$. 欲证 $\lambda^{-1}|A|$ 为 A^{*} 的特征值，只须证 $|(\lambda^{-1}|A|)E-A^{*}|=0$. 事实上

$$\begin{aligned}0&=|\lambda E-A|=|\lambda E-(A^{-1})^{-1}|\\&=|\lambda E-(|A|^{-1}A^{*})^{-1}|=|\lambda E-|A|(A^{*})^{-1}|\\&=|\lambda E-|A|(A^{*})^{-1}||A^{*}| \qquad [\text{两端乘以}|A^{*}|(\neq 0)]\\&=|\lambda A^{*}-|A|(A^{*})^{-1}A^{*}|\\&=|\lambda A^{*}-|A|E|=(-1)^{n}||A|E-\lambda A^{*}|\end{aligned}$$

$=(-1)^n\lambda^n|(\lambda^{-1}|A|)E-A^*|$,

因 $\lambda\neq0$,故 $|(\lambda^{-1}|A|)E-A^*|=0$,即 $\lambda^{-1}|A|$为 A^* 的特征值.

(2)证明二 在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 的两边左乘 A^*,利用 $A^*A=|A|E$,得到

$$A^*A\alpha=\lambda A^*\alpha;\qquad A^*\alpha=\lambda^{-1}|A|\alpha,$$

故 $\lambda^{-1}|A|$为 A^* 的特征值.

(2)证明三 由本节例 13 得到 $A^{-1}\alpha=\lambda^{-1}\alpha$,两边乘$|A|$,即得 $A^*\alpha=\lambda^{-1}|A|\alpha$,故 $\lambda^{-1}|A|$为 A^* 的特征值.

(2)证明四 在 $A\alpha=\lambda\alpha$ 两边左乘$|A|A^{-1}$证之(自行补充).

例 19[1996 年 5] 设有 4 阶矩阵 A 满足$|3E+A|=0$,$AA^T=2E$,$|A|<0$,其中 E 为 4 阶单位阵,求伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

解法一 由题设有$|A-(-3E)|=0$,即-3 为 A 的一个特征值.设其对应的特征向量为 α,则 $A\alpha=-3\alpha$.

又由 $AA^T=2E$,得到$|A|^2=2^4=16$ 即$|A|=\pm4$,而$|A|<0$,故$|A|=-4$.又由 $A\alpha=-3\alpha$,得到

$$A^{-1}A\alpha=-3A^{-1}\alpha \text{ 即 } A^{-1}\alpha=(-1/3)\alpha,$$

所以$|A|A^{-1}\alpha=(-1/3)|A|\alpha=(4/3)\alpha$,即 $A^*\alpha=(4/3)\alpha$.

解法二 利用上例的结论证之.由解法一知-3 为 A 的一个特征值,且$|A|=-4$,故 A^* 的一个特征值为

$$\lambda^{-1}|A|=(-1/3)\cdot(-4)=4/3.$$

解法三 $A\alpha=-3\alpha$,$A^*A\alpha=-3A^*\alpha$.因 $A^*A=|A|E$,故

$$|A|\alpha=-3A^*\alpha \quad \text{即} \quad A^*\alpha=(-|A|/3)\alpha=(4/3)\alpha.$$

解法四 因 $AA^T/2=E$,$A^{-1}=A^T/2$,$|A|=-4$,故

$$\begin{aligned}|3E+A|&=|(3/2)AA^T+A|=|A||3(A^T/2)+E|\\&=|3A^{-1}+E||A|=|A||(-3/4)|A|A^{-1}+E|\\&=|A||(-3/4)A^*+E|\\&=|A(3/4)^4||(4/3)E-A^*|=0.\end{aligned}$$

而$|A|=-4\neq0$,所以$|(4/3)E-A^*|=0$,(4/3)为 A^* 的特征值.

例 20 证明：零是矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\\2 & 5 & 6\\3 & 6 & 9\end{bmatrix}$ 的一个特征值.

证 只须证明 $|0E-A|=0$，即须证 $|-A|=(-1)^3|A|=0$. 事实上，因 A 的第 1 列与第 3 列成比例，由行列式性质即得 $|A|=0$. 例得证.

注意 当矩阵 A 的元素已知时，欲证某数 λ 为该矩阵的一特征值，由 $|\lambda E-A|=0$ 可知，归结证明该行列式等于零.

法四 矩阵 A 的多项式 $f(A)$ 的特征值按(5.1.3)式求(证)之.

如果知道 A 的特征值 λ 及 A 的属于 λ 的特征向量 α，应能准确地写出 A 的多项式 $f(A)$ 的特征值及特征向量. 例如，如果 $f(A)=A^8+6A^4-3A+E$，则 $f(A)$ 的特征值就是将 A 换成 λ 代入矩阵多项式，即得 $f(A)$ 的特征值 $f(\lambda)=\lambda^8+6\lambda^4-3\lambda+1$，而 $f(A)$ 属于 $f(\lambda)$ 的特征向量仍是 A 的属于 λ 的特征向量 α.

例 21 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$. 设矩阵 $B=A^3-5A^2$，试求 B 的特征值.

解 因 $B=f(A)=A^3-5A^2$，设 A 的特征值为 λ，则 $B=f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2$. 将 A 的 3 个特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=2$ 分别代入上式，即得 $B=f(A)$ 的 3 个特征值：

$$f(1)=-4,\quad f(-1)=-6,\quad f(2)=-12.$$

例 22 若 n 阶可逆阵 A 的每行元素之和为 $a(a\neq 0)$，求矩阵 $4A^3+3A^2+5A+E$ 的一个特征值.

解 因 A 的各行元素之和为 a，故 A 的一个特征值为 a，于是 $4A^3+3A^2+5A+E$ 的一个特征值为 $4a^3+3a^2+5a+1$.

例 23[1998 年 1] 设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值______.

解 由例 18 的结论知，A^* 必有特征值 $|A|/\lambda$. 又由(5.1.3)式

知，$(A^*)^2+E$ 必有特征值$(|A|/\lambda)^2+1$.

法五　转置、共轭法

对等式 $A\alpha=\lambda\alpha$ 施行转置、共轭运算，可证一(些)数为几类特殊矩阵的特征值．这几类特殊矩阵为酉矩阵，正交矩阵，厄米特矩阵，实对称矩阵，反厄米特矩阵，反对称矩阵等．

对矩阵施行转置、共轭运算时，须用到转置、共轭的下列运算规律．

设 A,B 为复矩阵，λ 为复数，且矩阵加法和乘法都是可行的，则

$$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B},\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\overline{A},\overline{AB}=\overline{A}\overline{B},$$

其中 $\overline{A}$ 表示对 $A=[a_{ij}]$中元素 a_{ij}取共轭，即 $\overline{A}=[\overline{a}_{ij}]$.

矩阵转置的性质参阅 § 2.10.

例 24　实反对称矩阵的特征值只能是 0 与纯虚数.

证　设 $A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq\mathbf{0})$，取转置得 $\alpha^TA^T=\lambda\alpha^T$，对后一等式取共轭，得 $\overline{\alpha^T}\overline{A^T}=\overline{\lambda\alpha^T}$，再利用 $\overline{A^T}=-A,\overline{A}=A$，有 $-\overline{\alpha^T}A=\overline{\lambda\alpha^T}$，两边右乘 α 得到 $-\overline{\alpha^T}A\alpha=\overline{\lambda\alpha^T}\alpha$，即 $-\lambda\overline{\alpha^T}\alpha=\overline{\lambda}\ \overline{\alpha^T}\alpha$，于是有 $(\lambda+\overline{\lambda})\overline{\alpha^T}\alpha=\mathbf{0}$，因 $\overline{\alpha^T}\alpha\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda+\overline{\lambda}=0$. 令 $\lambda=a+bi$，则 $a-bi+a+bi=2a=0$，从而 $a=0$，即 λ 的实部为零，所以当 λ 为实数时，只能为零；λ 为复数时，只能为纯虚数.

例 25　正交矩阵的实特征值必为 1 或 -1；复特征值必成对出现，其模为 1，且为 $\cos\theta\pm i\sin\theta$.

证　设 A 为正交矩阵，且设 $A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq\mathbf{0})$. 对其求共轭转置得到 $\overline{\alpha^T}\overline{A^T}=\overline{\lambda}\ \overline{\alpha^T}$. A 为正交阵，必为实矩阵，从而 $\overline{A}=A$，故 $\overline{\alpha^T}A^T=\overline{\lambda}\ \overline{\alpha^T}$. 在此等式左右两端分别右乘相等的列向量 $A\alpha,\lambda\alpha$ 得到

$$\overline{\alpha^T}A^TA\alpha=\overline{\alpha^T}E\alpha=\overline{\alpha^T}\alpha=\overline{\lambda}\ \overline{\alpha^T}\lambda\alpha=\overline{\lambda}\lambda\overline{\alpha^T}\alpha,$$

A 为正交阵，$A^TA=E$，由上式得到$(\overline{\lambda}\lambda-1)\overline{\alpha^T}\alpha=0$，但 $\overline{\alpha^T}\alpha\neq0(\alpha\neq\mathbf{0})$，故 $\overline{\lambda}\lambda=1$. 由此推出：

(1)若 A 的特征值 λ 为实数，则 $\lambda=1$ 或 -1；

(2)若 A 的特征值 λ 为复数，则其模为 1；

A 为实矩阵，λ 为实系数代数方程的复数根，因此

(3)若 A 的特征值 λ 为复根，则成对出现；

由上述(2)、(3)结论可知：

(4)若 λ 为 A 的复数根，则 $\lambda=\cos\theta\pm i\sin\theta$.

习　　题　5.1

1. 若 $A^2=E$，证明 A 的特征值只能是 1 和 -1.

2. 若 $B=C^{-1}AC$，且 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，则 λ_0 也是 B 的特征值.

3. 奇数阶反对称矩阵必有零特征值.

4. 设 $\alpha=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，$\beta=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$是两个非零的正交向量，且

$$A=\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

证明(1)$A=\alpha^T\beta$；(2)$A^2=O$；(3)$A^n=O$；(4)A 的所有特征值全为零.

5. 已知 A_1,A_2,A_3 是三个非零的 3 阶矩阵，且 $A_i^2=A_i(i=1,2,3)$，$A_iA_j=O(i\neq j;i,j=1,2,3)$，证明 $A_i(i=1,2,3)$的特征值有且仅有 1 和 0.

6. 设 A 为 n 阶反对称矩阵，证明如果 λ 为 A 的特征值，则 $-\lambda$ 也是其特征值.

7. 设 A 为奇数阶正交阵，且 $|A|=1$，证明 1 是 A 的特征值.

8. [1990 年 5]　设方阵 A 满足条件 $AA^T=E$，其中 A^T 为 A 的转置矩阵，E 为单位阵，证明 A 的实特征向量所对应的特征值的绝对值等于 1.

9. [1992 年 5]　求矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$的非零特征值.

10. [1993 年 5][选择题]　设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 A 的一特征值，则矩阵 $[(1/3)A^2]^{-1}$有一特征值等于______.

(A)4/3　　(B)3/4　　(C)1/2　　(D)1/4

11. 试证 n 阶矩阵

$$A=a^2\begin{bmatrix}1 & \rho & \rho & \cdots & \rho\\ \rho & 1 & \rho & \cdots & \rho\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \rho & \rho & \rho & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

的最大特征值为 $\lambda=a^2[1+(n-1)\rho]$，其中 $0<\rho<1$.

12.［1991 年 4］［选择题］ 设 A 为 n 阶可逆阵，λ 为 A 的一个特征值，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值之一是______.

(A)$\lambda^{-1}|A|^n$　　(B)$\lambda^{-1}|A|$　　(C)$\lambda|A|$　　(D)$\lambda|A|^n$

§5.2 用矩阵 A 的特征值计算 $|A|$ 及证明 kE-A 的可逆性

矩阵的特征值与其行列式的关系是解决本节所提问题的关键.先用例题的形式导出这关系式.

例 1 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n. \tag{5.2.1}$$

证明：(1) $a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})$； (5.2.2)

(2) $a_n=(-1)^n|A|$. (5.2.3)

证

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n. \tag{5.2.4}$$

下面求出我们感兴趣的系数 a_1 和 a_n.

上面特征多项式即行列式 $|\lambda E-A|$ 的展开式中必有一项是其主对角线上元素的乘积 $(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$，展开式中其余各项，因为要去掉一行和一列，故至多包含有 $n-2$ 个主对角线上的元素的乘积，所以这些项中 λ 的次数最多是 $n-2$ 次，因此特征多项式 $f(\lambda)$ 中含 λ 的 n 次与 $n-1$ 次的项，只能在主对角线上元素的连乘积那些项中出现.事实上

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$
$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots,$$

因而

$$a_1=-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}).$$

因(5.2.4)式是关于 λ 的恒等式，令 $\lambda=0$，得到

$$\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=a_n,$$

故 $a_n=(-1)^n|A|$. 证毕

注意 此例说明 n 阶矩阵的特征多项式是一个 λ 的(首项系数为 1 的)多项式，其 $n-1$ 次项的系数为矩阵 A 的主对角线上元素之和的相反数，其常数项为 $(-1)^n$ 与矩阵 A 的行列式 $|A|$ 的乘积.

例 2 设 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其特征多项式如(5.2.1)式所示，证明

(1) $$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n); \tag{5.2.5}$$

(2) $$a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{5.2.6}$$

证 由题设 A 的所有特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，故

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$
$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

将上式与(5.2.1)式比较，得到

$$a_1=-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n);\quad a_n=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

比较(5.2.3)与(5.2.6)两式，得到

$$|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n. \tag{5.2.7}$$

由(5.2.2)式与(5.2.5)式得到

$$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n. \tag{5.2.8}$$

称 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 为 A 的迹，记为 $\mathrm{tr}A$. 因而

$$\operatorname{tr}A=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n. \tag{5.2.9}$$

(5.2.7)式和(5.2.9)式是常要用到的结论.

(5.2.7)式给出 A 的行列式与其特征值的重要关系，由此得到计算 $|A|$ 及判别 $kE-A$ 的可逆性的新方法. 下面分别介绍.

(一)用特征值计算矩阵 A 的行列式 $|A|$

为利用(5.2.7)式计算 $|A|$，必须先求出矩阵 A 的所有特征值，为此，应熟悉上节例 11 中所给出的 A 的矩阵多项式 $f(A)$ 的特征值求法.

例 3 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-1,2$. 设矩阵 $B=A^3-5A^2$，试计算(1) $|B|$；(2) $|A-5E|$.

解 (1)由 § 5.1 例 11 知 B 的 3 个特征值为 $-4,-6,-12$，根据(5.2.7)式得

$$|B|=(-4)(-6)(-12)=-288.$$

(2)**解法一** 令 $f(A)=A-5E$，因 A 的所有特征值为 $\lambda=1,-1,2$ 故 $f(A)=A-5E$ 的所有特征值为 $f(\lambda)=\lambda-5$，即

$$f(1)=1-5=-4, f(-1)=-1-5=-6,$$
$$f(2)=2-5=-3,$$

故由(5.2.7)式得到

$$|A-5E|=|f(A)|=f(1)f(-1)f(2)=-72.$$

解法二 因 A 的所有特征值为 $1,-1,2$，故由(5.2.7)式得 $|A|=-2$，又 $B=A^3-5A^2=A^2(A-5E)$，故 $|B|=|A|^2|A-5E|$，即

$$|A-5E|=|B|/|A|^2=(-288)/4=-72.$$

解法三 因 A 的 3 个特征值为 $1,-1,2$，故

$$|\lambda E-A||=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

令 $\lambda=5$，由上式得到 $|5E-A|=(5-1)(5+1)(5-2)=72$，故

$$|A-5E|=(-1)^3|5E-A|=-72.$$

例 4 设 n 阶方阵 A 有 n 个特征值 $0,1,2,\cdots,n-1$，且方阵 B

与 A 相似,求 $|E+B|$.

解 因 A 的 n 个特征值为 $0,1,2,\cdots,n-1$,而 A 与 B 相似,故 B 的 n 个特征值也为 $0,1,2,\cdots,n-1$. 令 $f(B)=B+E$,其中 $f(\lambda)=\lambda+1$,则 $f(B)$的 n 个特征值为

$$f(0)=1,f(1)=2,\cdots,f(n-1)=n.$$

由(5.2.7)式得到

$$|B+E|=|f(B)|=f(0)\cdot f(1)\cdots f(n-1)=n!.$$

(二)用矩阵 A 的特征值证明 $kE-A$ 的可逆性

用矩阵 A 的特征值证明 $kE-A$(E 是与 A 同阶的单位阵,k 为常数)可逆或不可逆,只需证常数 k 不是或是 A 的特征值,即

若 k 不是 A 的特征值,因 $|kE-A|\neq 0$,$kE-A$ 可逆;

若 k 是 A 的特征值,因 $|kE-A|=0$,$kE-A$ 不可逆.

例 5 设矩阵 A 满足 $A^2=E$,证明 $3E-A$ 可逆.

证 因 $A^2=E$,于是 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$(见习题 5.1 第 1 题),故 3 不是 A 的特征值,从而 $3E-A$ 可逆.

例 6 已知 n 阶矩阵 A 的特征值为 λ,且 $\lambda\neq\pm 1$,试证 $A\pm E$ 为可逆矩阵.

证 因 $\lambda\neq\pm1$,故 ±1 不是 A 的特征值,于是

$$|1\cdot E-A|\neq 0,|(-1)E-A|\neq 0.$$

因
$$|E-A|=|-(A-E)|=(-1)^n|A-E|,$$
$$|-E-A|=|-(A+E)|=(-1)^n|A+E|,$$

故 $|A-E|\neq 0,|A+E|\neq 0$,从而 $A\pm E$ 为可逆矩阵.

例 7 对于任何矩阵 A,除有限个 ε 值外,矩阵 $A+\varepsilon E$ 为满秩矩阵.

证 为证 $A+\varepsilon E$ 除有限个 ε 值外为满秩矩阵,只需证明只有有限个 ε 值满足 $|A+\varepsilon E|=0$. 事实上,如

$$|A+\varepsilon E|=|\varepsilon E-(-A)|=0,$$

则 ε 为 $-A$ 的特征值,但 n 阶矩阵 $-A$ 至多只有 n 个不同的特征

值，故除去这有限个 ε 值即 $-A$ 的特征值外，$A+E$ 均为满秩矩阵. 证毕

当 A 为正交矩阵时，为证 $kE-A$ 的可逆性，常进行如下恒等变形：

将含正交矩阵 A 的行列式等式中的单位矩阵 E(如果没在 E 应在适当地方乘进)改写为 $E=A^{T}A$ 或 $E=AA^{T}$(如 A 不是正交阵，E 可改写为互为其逆的两矩阵乘积，像本节例 10 中(2)的证明那样.)，然后提取公因式，再利用转置矩阵、乘积矩阵和正交矩阵的行列式性质(2.11.2)和(2.11.1)式，进行计算和推导.

例 8 设 A 为正交矩阵，若 $|A|=-1$，则 $-E-A$ 不可逆.

证 本例不知 A 的特征值，待证 -1 是 A 的特征值. 这类命题常通过恒等变形证明. 利用(2.11.1)、(2.11.2)式，得到

$$
\begin{aligned}
|-E-A|&=|(-1)AA^{T}-A|=|A[(-1)A^{T}-E]|\\
&=|A||(-1)A^{T}-E|=|A||-E-A^{T}|\\
&=|A||-E-A|=(-1)|-E-A|,
\end{aligned}
$$

即 $2|-E-A|=0$，从而 $|-E-A|=0$，故 $-E-A$ 不可逆.

例 9 $(2n+1)$ 阶正交矩阵 A，如果 $|A|=1$，证明 $E-A$ 为不可逆矩阵.

证
$$
\begin{aligned}
|E-A|&=|AA^{T}-A|=|A||A^{T}-E|\\
&=|A||A-E| \quad [\text{利用(2.11.2)式}]\\
&=(-1)^{2n+1}|E-A|,
\end{aligned}
$$

故 $2|E-A|=0$，即 $|E-A|=0$，$E-A$ 不可逆.

例 10 实矩阵 A 是 n 阶反对称矩阵，证明

(1)$E+A$，$E-A$ 都是可逆矩阵；

(2)令 $C=(E-A)(E+A)^{-1}$，则 $E+C$ 为可逆矩阵.

证 (1)由 §5.1 例 24 知 A 的特征值只能是零与纯虚数，因而 1 和 -1 都不可能是 A 的特征值，故

$$|E-A|=|1\cdot E-A|\neq 0,$$

$$|(-1)E-A|=(-1)^{n}|E+A|\neq 0,\text{即 } |E+A|\neq 0,$$

于是 $E+A,E-A$ 都是可逆矩阵.

(2)为证 $E+C$ 是可逆矩阵,只须证 $|E+C|\neq 0$. 因

$$|E+C|=||(E+A)(E+A)^{-1}+(E-A)(E+A)^{-1}|$$
$$=|(E+A+E-A)(E+A)^{-1}|=|2E||E+A|^{-1},$$

而 $|2E|=2^n\neq 0$, $|E+A|\neq 0$,故 $|E+C|\neq 0$.

例 11 设 A,B 都是 n 阶方阵,$\varphi(\lambda)$是 B 的特征多项式,证明 $\varphi(A)$非奇异的充要条件是 A 和 B 没有公共的特征值.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 B 的特征值,则

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n),$$
$$\varphi(A)=(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)\cdots(A-\lambda_nE);$$

且 $\varphi(A)$可逆 $\leftrightarrow|\varphi(A)|\neq 0\leftrightarrow|A-\lambda_iE|\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$

$\leftrightarrow\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 不是 A 的特征值,

$\leftrightarrow A$ 和 B 没有公共的特征值.

习 题 5.2

1. 试证奇数阶反对称矩阵必不可逆.
2. 设 A 为 n 阶方阵,且 $A^2=A$,证明 $2E-A$ 可逆.
3. 设 A 为 n 阶方阵,证明若 $A^2=E$,且 A 的特征值都等于 1,则 $A=E$.
4. 若矩阵 A 与 B 相似,则 $|A|=|B|$.

§5.3 向量是与不是特征向量的证法

本节讨论向量是与不是某抽象矩阵的特征向量的证法.

(一)向量是特征向量的证法

常从特征向量的下述定义:

$$A\alpha=\lambda\alpha(\alpha\neq 0) \tag{5.3.1}$$

出发，应用矩阵运算及其性质证之. 要注意满足 $A\alpha=\lambda\alpha$ 的向量不一定是矩阵 A 的特征向量，只有满足上式且是非零的向量 α 才是 A 的特征向量.

例 1 (1)问 $(\lambda_0E-A)X=\mathbf{0}$ 的解向量是否都是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量?

(2)如果 α 是 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，则 α 的倍向量 $k\alpha$ 是否也是 A 的属于 λ_0 的特征向量?

(3)如果 α,β 是 A 的属于特征值 λ_0 的任意两个特征向量，则其线性组合 $k_1\alpha+k_2\beta$ 是否都是 A 的属于 λ_0 的特征向量?

解 由定义知，特征向量是满足(5.3.1)式的非零向量，因此

(1)如解向量是非零向量，就是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

(2)如 $k\alpha\neq\mathbf{0}$，即 $k\neq0$，则 $k\alpha$ 也是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

(3)如果 $k_1\alpha+k_2\beta\neq\mathbf{0}$，则它就是 A 的属于 λ_0 的特征向量.

例 2 对于特征值 λ_0，如果方程组 $(\lambda_0E-A)X=\mathbf{0}$ 的基础解系由 α_1,α_2 所组成，那么 A 的属于 λ_0 的全部特征向量为 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$，或为 $k_2\alpha_2(k_2\neq0)$，或为 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，这些说法对吗?

解 说法都不对. 把 $k_1\alpha_1$，或 $k_2\alpha_2(k_1\neq0,k_2\neq0)$ 作为 A 的属于 λ_0 的全部特征向量，丢掉了 k_1,k_2 全不为零的特征向量；把 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 作为 A 的属于 λ_0 的全部特征向量，由于没有指明 k_1、k_2 不同时为零，因而把 $k_1=k_2=0$ 时所得到的零向量也作为特征向量.

例 3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 分别为 A 的属于互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量，则

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n \quad (k_1,k_2,\cdots,k_n \text{ 不全为零})$$

为 A 的全部特征向量，这种说法对吗?

解 不对! 由定义知，特征向量总是属于某一特征值的向量，而 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_+\cdots+k_n\alpha_n$ 没有交待是 A 的属于哪个特征值的特征向量. 事实上只要 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有两个不为零时，$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

$+\cdots+k_n\alpha_n$ 就不是 A 的特征向量(见本节例 11).

例 4 设 α 为矩阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量,记 $B=A^2+pA+qE$(p,q 为常数),证明 α 是矩阵 B 属于特征值 $\lambda^2+p\lambda+q$ 的特征向量.

证明一 由 $A\alpha=\lambda\alpha$,得到 $A^2\alpha=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$,故

$$\begin{aligned}B\alpha&=(A^2+pA+qE)\alpha=A^2\alpha+p(A\alpha)+qE\alpha\\&=\lambda^2\alpha+p\lambda\alpha+q\alpha=(\lambda^2+p\lambda+q)\alpha.\end{aligned}$$

证明二 下证 $B\alpha=(\lambda^2+p\lambda+q)\alpha$,为此证 $B\alpha-(\lambda^2+p\lambda+q)\alpha=\mathbf{0}$. 事实上

$$\begin{aligned}B\alpha-(\lambda^2+p\lambda+q)\alpha&=[B-(\lambda^2E+p\lambda E+qE)]\alpha\\&=(A^2+pA+qE-\lambda^2E-p\lambda E-qE)\alpha\\&=[(A^2-\lambda^2E)+p(A-\lambda E)]\alpha\\&=[(A+\lambda E)(A-\lambda E)+p(A-\lambda E)]\alpha\\&=(A+\lambda E)(A-\lambda E)\alpha+p(A-\lambda E)\alpha\end{aligned}$$

因 $A\alpha=\lambda\alpha$ 故 $A\alpha-\lambda\alpha=(A-\lambda E)\alpha=\mathbf{0}$,从而上式中最后等式的右端等于零. 例得证.

例 5 设 A 为 n 阶可逆阵,且有 n 个线性无关的特征向量,证明 A^{-1}与 A 及 $A+A^{-1}$与 A 都有相同的 n 个线性无关的特征向量.

证 因 $A\alpha=\lambda\alpha$,A 可逆,故 $\lambda\neq 0$,即 $A^{-1}A\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$,亦即 $A^{-1}\alpha=(1/\lambda)\alpha$,所以 A^{-1}与 A 有相同的 n 个线性无关的特征向量. 又由

$$(A+A^{-1})\alpha=A\alpha+A^{-1}\alpha=\lambda\alpha+(1/\lambda)\alpha=(\lambda+1/\lambda)\alpha$$

可知,$A+A^{-1}$与 A 有相同的 n 个线性无关的特征向量.

例 6 已知 A_1,A_2,A_3 是 3 个非零矩阵,且

$$A_i^2=A_i,\quad A_iA_j=0\quad (i\neq j;i,j=1,2,3).$$

证明 A_i 的属于特征值 1 的特征向量是 A_j 的属于特征值零的特征

向量.

证 由 $A_i^2=A_i$ 知 A_i 为幂等矩阵，因而 A_i 的特征值有且仅有 0 与 1（见 §5.1 例 1）. 如果 $A_i\alpha=1\cdot\alpha$，将 A_j 左乘 $A_i\alpha=1\alpha$ 的两端，得到

$$A_jA_i\alpha=A_j\alpha \qquad \text{即 } A_j\alpha=0\cdot\alpha,$$

亦即 α 是 A_j 的属于特征值 0 的特征向量.

例 7 设 α 是 n 阶对称矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，求矩阵 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}$ 的属于其特征值 λ_0 的特征向量.

解法一 令 $(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}=B$. 先求出 B 右乘矩阵的表示式. 由

$$B=P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}, \text{即得 } BP^{\mathrm{T}}=P^{\mathrm{T}}A;$$

再求出 B 右乘一列向量的表示式，为此在上等式两端右乘 α，得到

$$BP^{\mathrm{T}}\alpha=P^{\mathrm{T}}A\alpha=\lambda_0P^{\mathrm{T}}\alpha, \text{即 } (P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}(P^{\mathrm{T}}\alpha)=\lambda_0(P^{\mathrm{T}}\alpha).$$

因 P 可逆，$\alpha\neq\mathbf{0}$，故 $P^{\mathrm{T}}\alpha\neq\mathbf{0}$，因而 $P^{\mathrm{T}}\alpha$ 为所求的特征向量.

解法二 设所求的特征向量为 $\boldsymbol{Y}$，则

$$(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=\lambda_0\boldsymbol{Y} \quad \text{即} [\lambda_0E-(P^{-1}AP)^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{Y}=\mathbf{0}. \tag{5.3.2}$$

下从(5.3.2)式出发，利用 $A\alpha=\lambda_0\alpha$ 条件再给出 $\boldsymbol{Y}$ 的三种求法.

求法一 将(5.3.2)式左端恒等变形，得到

$$[\lambda_0P^{\mathrm{T}}E(P^{\mathrm{T}})^{-1}-P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}]\boldsymbol{Y}=P^{\mathrm{T}}(\lambda_0E-A)(P^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

Y 等于什么，使上式右端为零，令 $\boldsymbol{Y}=P^{\mathrm{T}}\alpha$，既可消掉 $(P^{\mathrm{T}})^{-1}$，又可利用 $(\lambda_0E-A)\alpha=\mathbf{0}$ 使上式右端为零，且 $\boldsymbol{Y}=P^{\mathrm{T}}\alpha\neq\mathbf{0}$，因而 $P^{\mathrm{T}}\alpha$ 即为所求的特征向量.

求法二 Y 等于什么，使(5.3.2)式左端等于零. 为此将 $(P^{\mathrm{T}})^{-1}$ 左乘之，得

$$[\lambda_0(P^{\mathrm{T}})^{-1}-A(P^{-1})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{Y}=(\lambda_0E-A)(P^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Y}.$$

由求法一可知，令 $P^{\mathrm{T}}\alpha$ 可使上式为零，因而 $P^{\mathrm{T}}\alpha$ 即为所求.

求法三 在等式 $A\alpha=\lambda_0\alpha$，两端左乘 P^{T}，得到

$$P^{\mathrm{T}}A\alpha=\lambda_0P^{\mathrm{T}}\alpha, \text{即 } P^{\mathrm{T}}A(P^{\mathrm{T}})^{-1}(P^{\mathrm{T}}\alpha)=\lambda_0P^{\mathrm{T}}\alpha,$$

亦即$(P^{-1}AP)^{T}(P^{T}\alpha)=\lambda_0(P^{T}\alpha)$，$P^{T}\alpha$ 即为所求. 解毕

现将矩阵 A 及与 A 有关的常用矩阵的特征值、特征向量关系总结如下表：

矩阵	A	kA (k 为常数)	A^m (m 为正整数)	$f(A)$ (矩阵多项式)	A^{-1} (A 可逆)	A^{T}
特征值	λ	$k\lambda$	λ^m	$f(\lambda)$	λ^{-1}	λ
特征向量	α(属 λ)	α(属 λ)	α(属 λ^m)	α[属 $f(\lambda)$]	α(属 λ^{-1})	不一定是 α

矩阵	A^* (A 可逆)	$P^{-1}AP$(P 可逆)	$(P^{-1}AP)^{T}$
特征值	$\lambda^{-1}\|A\|$	λ	λ
特征向量	α(属 $\lambda^{-1}\|A\|$)	$P^{-1}\alpha$(属 λ)	$P^{T}\alpha$(属 λ)

(二)向量不是特征向量的证法

常用反证法证之.

例 8 一个向量 α 不可能同时是矩阵 A 的不同特征值的特征向量(即一个特征向量只能属于一个特征值)，试证之.

证明一 用反证法证之. 如果 α 是矩阵 A 的不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda_1\alpha,\quad A\alpha=\lambda_2\alpha.$$

从而 $\lambda_1\alpha=\lambda_2\alpha$，即 $(\lambda_1-\lambda_2)\alpha=\mathbf{0}$，因 $\lambda_1\neq\lambda_2$，故 $\alpha=\mathbf{0}$，这与特征向量的定义矛盾.

证明二 如果 α 是属于 A 的不同特征值的特征向量，则 α 与 α 线性无关，显然这是不可能的.

例 9[1987 年 2][1990 年 4] 设 λ_1,λ_2 是 n 阶矩阵 A 的两个不同的特征值，α_1,α_2 分别是 A 的属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

证明一 假设 $\alpha_1+\alpha_2$ 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$$A(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda(\alpha_1+\alpha_2)=\lambda\alpha_1+\lambda\alpha_2. \tag{5.3.3}$$

又 $$A(\alpha_1+\alpha_2)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2, \tag{5.3.4}$$

(5.3.3)式减去(5.3.4)式得

$$(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+(\lambda-\lambda_2)\alpha_2=\mathbf{0}. \tag{5.3.5}$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$,α_1 与 α_2 线性无关,故 $\lambda-\lambda_1=\lambda-\lambda_2=0$,从而 $\lambda_1=\lambda_2$ 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 矛盾,故 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

证明二 下面分三种情况证明.

(1)$\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是属于 λ_1,λ_2 以外的特征值的特征向量.如果是,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2$ 应线性无关,但事实上

$$\alpha_1+\alpha_2+(-1)(\alpha_1+\alpha_2)=\mathbf{0},$$

它们线性相关.

(2)$\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是 A 的属于 λ_1 的特征向量.如果是,因 $-\alpha_1$ 也是 A 的属于 λ_1 的特征向量,则

$$\alpha_1+\alpha_2+(-\alpha_1)=\alpha_2$$

也是属于 λ_1 的特征向量,显然 α_2 又是属于 λ_2 的特征向量,而 $\lambda_1\neq\lambda_2$,α_2 与 α_2 应线性无关,但事实上线性相关,这矛盾说明 $\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是属于 λ_1 的特征向量.

(3)同法可证 $\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是 A 的属于 λ_2 的特征向量.

从而 $\alpha_1+\alpha_2$ 不可能是 A 的任何一个特征值的特征向量,故不是 A 的特征向量.

证明三 因 $\lambda_1\neq\lambda_2$,故 λ 必与其中一个不相等,不妨设 $\lambda\neq\lambda_1$,由(5.3.5)式得

$$\alpha_1=[(\lambda_2-\lambda)/(\lambda-\lambda_1)]\alpha_2.$$

因 $[(\lambda_2-\lambda)/(\lambda-\lambda_1)]\alpha_2$ 是属于 λ_2 的特征向量,故 α_1 也是属于 λ_2 的特征向量,显然 α_1 是属于 λ_1 的特征向量,而 $\lambda_1\neq\lambda_2$,于是 α_1 是 A 的属于两个不同特征值的特征向量,由本节例 8 知这是不可能的,故 $\alpha_1+\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

例 10 设 α_1,α_2 分别为矩阵 A 的属于不同特征值 λ_1,λ_2 的特征向量,证明当 $k_1k_2\neq0$ 时,$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不是 A 的特征向量.

证 因 $k_1k_2\neq0$,故 k_1,k_2 全不为零,从而 $\beta_1=k_1\alpha_1$ 与 $\beta_2=k_2\alpha_2$ 分别是属于 λ_1,λ_2 的特征向量,由上例得知 $\beta_1+\beta_2=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$ 不

可能是 A 的特征向量.

例 11 设 α_i 为矩阵 A 的属于互异特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,t)$ 的特征向量，证明当 k_i 中至少有两个不为零时 $(i=1,2,\cdots,t)$，则 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 必不是 A 的特征向量.

证明一 设 $A(k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t)=\lambda(k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t)$，则

$$k_1(\lambda-\lambda_1)\alpha_1+k_2(\lambda-\lambda_2)\alpha_2+\cdots+k_t(\lambda-\lambda_t)\alpha_t=\mathbf{0}.$$

因属于不同特征值的特征向量线性无关，故

$$k_1(\lambda-\lambda_1)=k_2(\lambda-\lambda_2)=\cdots=k_t(\lambda-\lambda_t)=0,$$

但由题设 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 中至少有两个不为零，不妨设 $k_r\neq0,k_s\neq0(1\leqslant r,s\leqslant t)$，由

$$k_r(\lambda-\lambda_r)=k_s(\lambda-\lambda_s)=0.$$

得到 $\lambda=\lambda_r=\lambda_s$，这与特征值互异矛盾，所以 $k_1\alpha_1+\cdots+k_t\alpha_t$ 必不是 A 的特征向量.

证明二 不妨设 $k_r,k_s(1\leqslant r,s\leqslant t)$ 不为零. 由本节例 9 知，$k_r\alpha_r+k_s\alpha_s$ 不可能是 A 的特征向量，$k_1,k_2,\cdots,k_t$ 中如有 m 个不为零，不妨说设 $k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_m}\neq0$，利用数学归纳法及本节例 9 的结论易证 $k_{i_1}\alpha_1+k_{i_2}\alpha_2+\cdots+k_{i_m}\alpha_m$，即 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_t\alpha_t$ 不可能是 A 的特征向量.

习　题　5.3

1. 假如 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都是矩阵 A 的属于 λ_0 的特征向量，问 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的任意线性组合是否都是 A 的特征向量?

2. 已知满秩矩阵 A 的特征值及特征向量，试求 A^{-1} 及 A^* 的特征值，特征向量.

3. 如 X 是 A 的属于 λ_0 的特征向量，试求 $P^{-1}AP$ 属于 λ_0 的特征向量.

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别是矩阵 A 的属于互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量，证明

$$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1,a\alpha_1+b\alpha_2+c\alpha_3$$

都不可能是 A 的特征向量，其中 $abc\neq 0$.

§5.4 两矩阵相似的证法

先介绍矩阵与对角阵相似的证法，然后介绍不与对角阵相似的证法，最后介绍与非对角阵相似的证法.

(一)与对角阵相似的证法

矩阵 A 与对角阵相似，常称矩阵 A 可对角化.

判别 A 能否与对角阵相似，可遵循下述途径进行.

途径Ⅰ 不计算矩阵 A 的特征值、特征向量，因而不必求出可逆阵 P 及对角阵 Λ，只需证明使 $P^{-1}AP=\Lambda$ 成立的 P 和 Λ 存在.

例 1 若 n 阶矩阵可对角化，则 A^T，kA 也可对角化(k 为常数).

证 因 A 可对角化，故存在可逆阵 P_1，使

$$P_1^{-1}AP_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值. 对上式取转置，得

$$P_1^TA^T(P_1^{-1})^T=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

即
$$[(P_1^{-1})^T]^{-1}A^T(P_1^{-1})^T=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

令 $(P_1^{-1})^T=P$，显然 P 可逆，且有

$$P^{-1}A^TP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

故 A^T 可对角化. 同法可证 kA 也可对角化.

例 2 两个对角矩阵的对角元素相同，仅排列位置不同，证明这两个对角矩阵相似.

证 设两个对角矩阵 Λ_1 与 Λ_2 对角元素相同，仅排列次序不同. 例如 $\Lambda_1=\mathrm{diag}(1,2,3)$，$\Lambda_2=\mathrm{diag}(3,2,1)$，我们可以用一系列行的调换与同类型的列的调换把 Λ_1 化成 Λ_2，例如

$$\Lambda_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}0&0&3\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\Lambda_2.$$

把上述过程用初等矩阵可表示为 $E_{13}\Lambda_1E_{13}=\Lambda_2$，其中 $E_{13}^{-1}=E_{13}$[见(2.15.3)式]，于是可假设用一系列行的对换与同类型的列的对换把 Λ_1 化成 Λ_2，则有一系列具有性质 $E_i=E_i^{-1}$ 的初等矩阵 $E_i(i=1,2,\cdots,s)$，使

$$E_sE_{s-1}\cdots E_2E_1\Lambda_1E_1E_2\cdots E_{s-1}E_s=\Lambda_2,$$

即 $$E_s^{-1}E_{s-1}^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}\Lambda_1E_1E_2\cdots E_{s-1}E_s=\Lambda_2.$$

令 $P=E_1E_2\cdots E_{s-1}E_s$，则 P 为可逆阵，于是有 $P^{-1}\Lambda_1P=\Lambda_2$，故 Λ_1 与 Λ_2 相似.

途径Ⅱ 不计算矩阵 A 的特征值，只须证明特征值互异的性质，即可判定 A 能与对角阵相似. 特别当矩阵 A 的元素是文字时，常应用根与系数的关系或二次方程的判别式证明特征值互异. 其特征值和特征向量一般不必也不便求出.

例 3[1993 年 4][选择题] n 阶矩阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角矩阵相似的____.

(A)充分必要条件 (B)充分而非必要条件

(C)必要而非充分条件 (D)既非充分也非必要条件

解 (B)入选.

例 4 1)若二阶实矩阵 A 的行列式 $|A|<0$，则 A 与对角阵相似.

2)设 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，若 $ad-bc=1$，$|a+d|>2$，则 A 与对角阵相似.

证 1)令 A 的特征多项式为 $f(\lambda)$，则

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2+a_1\lambda+a_2,$$

其中 $a_2=(-1)^2|A|=|A|<0$[参阅(5.2.3)式]. 又设 A 的两个特征值为 λ_1,λ_2，由韦达定理[或由(5.2.6)，或由(5.2.7)式]知

$$a_2=\lambda_1\lambda_2=|A|<0,$$

故 λ_1 与 λ_2 异号. 因而 A 的两个特征值互异,故 A 可对角化,即 A 与对角阵相似.

2)A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^2-(a+d)\lambda+1$. 因 $|a+d|>2$, $f(\lambda)$的判别式 $=(a+d)^2-4>0$,故 A 有两个不等的非零实特征值,从而 A 与对角阵相似.

途径 Ⅱ 计算矩阵 A 的特征值. 如果 A 的特征值 λ_i 互异,当然与对角阵相似. 如果有重特征值,可通过计算特征矩阵 λ_iE-A 的秩来判定是否与对角阵相似,即

如果对 n 阶矩阵 A 的每个 k_i 重特征值 λ_i,有

$$\text{秩}(\lambda_iE-A)=n-k_i, \tag{5.4.1}$$

则 A 与对角阵相似,否则不相似.

值得注意的是,上述途径 Ⅱ 不必求出其特征向量,条件(5.4.1)式是 A 有 n 个线性无关的特征向量的等价说法. 事实上,由(5.4.1)式得到

$$n-\text{秩}(\lambda_iE-A)=k_i, \tag{5.4.2}$$

即齐次线性方程组$(\lambda_iE-A)X=0$ 的基础解系含 k_i 个解向量. 因此 λ_i 的重数 k_i 等于 A 的属于 λ_i 的线性无关的特征向量的个数. 设 A 的互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$,其重数分别为 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,因 $k_1+k_2+\cdots+k_s=n$,故 A 有 n 个线性无关的特征向量. 因而条件(5.4.1)式其方便之处就在于不求出 A 的特征向量,能判别 A 有 n 个线性无关的特征向量,从而能判别 A 与对角阵相似.

例 5[1994 年 4,5] 设 $A=\begin{bmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量,求 x 与 y 应满足的条件.

解法一 因 3 阶矩阵 A 有 3 个线性无关的特征向量,故 A 与对角阵相似,又由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ 得到 $\lambda_1=1$ 为二重特征值,从而必有 $n-\text{秩}(\lambda_1E-A)=k_1$(重数),即

$$秩(E-A)=秩\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{bmatrix}=n-k_1=3-2=1,$$

因而 $E-A$ 中 2 阶子式 $\begin{vmatrix}1&-1\\-x&-y\end{vmatrix}=0$ 即 $x+y=0$.

$\lambda_2=-1$ 时，由秩$(\lambda_2E-A)=$秩$(-E-A)=n-k_2=3-1=2$，得到

$$|-E-A|=\begin{vmatrix}-1&0&-1\\-x&-2&-y\\-1&0&-1\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=0.$$

因而由 $|E-A|=0$，推不出 x 与 y 的新关系，故 x 与 y 所满足的条件仅为 $x+y=0$.

解法二 由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$(二重根)，$\lambda_2=-1$. 因 A 有三个线性无关的特征向量，故属于 $\lambda_1=1$(二重根)的线性无关的特征向量有两个. 因而$(\lambda_1E-A)X=0$ 的一个基础解系含两个解向量，系数矩阵 $\lambda_1E-A=E-A$ 的秩必等于 1. 从而矩阵 $E-A=\begin{bmatrix}1&0&-1\\-x&0&-y\\-1&0&1\end{bmatrix}$ 中的所有 2 阶子式必等于零. 特别由 $\begin{vmatrix}1&-1\\-x&-y\end{vmatrix}=-(x+y)=0$ 得到 $x+y=0$.

同样，由 λ_2E-A 的秩等于 2，即 $|E-A|=0$ 推不出 x 与 y 的新关系.

例 6 下列矩阵中 a,b,c 取何值时，A 可对角化？

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\2&b&2&0\\2&3&c&2\end{bmatrix}.$$

解 $|E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2$，故 A 的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=1$，

$\lambda_3=\lambda_4=2$. 为使

$$\text{秩}(\lambda_1 E-A)=\text{秩}(E-A)$$

$$=\text{秩}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -b & -1 & 0 \\ -2 & -3 & -c & -1 \end{bmatrix}=n-k_1=4-2=2.$$

必有 $a=0$,b,c 可任意. 同样,为使

$$\text{秩}(\lambda_3 E-A)=\text{秩}(2E-A)$$

$$=\text{秩}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -b & 0 & 0 \\ -2 & -3 & -c & 0 \end{bmatrix}=n-k_3=4-2=2,$$

必有 $c=0$,a,b 任意. 从而当 $a=c=0$,b 为任意时,A 可对角化.

注意 由上两例可知,当矩阵 A 可对角化时,常用(5.4.1)式确定 A 中参数及其所满足的条件.

例 7 设 A,B 为两个 n 阶矩阵,且 A 的 n 个特征值两两互异. 若 A 的特征向量恒为 B 的特征向量,则 $AB=BA$.

证 设 A 的属于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 则 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$. 又设 B 的 n 个互异的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$,由题设知 B 的属于 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 的 n 个特征向量分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,因而 $B\alpha_i=\mu_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

下用两种方法证明 $AB=BA$. 第一种方法 因 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,则 P 为可逆阵. 因 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 互异,A 与对角阵相似. 又因 B 有 n 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,$B$ 也与对角阵相似,于是有

$$P^{-1}AP=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad P^{-1}BP=\text{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$

上两式相乘得到

$$P^{-1}ABP=\text{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n),$$

$$P^{-1}BAP=\text{diag}(\mu_1\lambda_1,\cdots,\mu_n\lambda_n)=\text{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n),$$

故 $AB=P\text{diag}(\lambda_1\mu_1,\cdots,\lambda_n\mu_n)P^{-1}=BA$.

第二种方法 在 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$ 与 $B\alpha_i=\mu_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$两端分别左乘 B 与 A,得到

$$BA\alpha_i=\lambda_iB\alpha_i=\lambda_i\mu_i\alpha_i,AB\alpha_i=\mu_iA\alpha_i=\lambda_i\mu_i\alpha_i,$$

从而有

$$BA\alpha_i=AB\alpha_i=\lambda_i\mu_i\alpha_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

故

$$BA[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=AB[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n].$$

在等式两端右乘 $P^{-1}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}$即得 $AB=BA$.

途径Ⅳ 除证明 A 与对角阵 Λ 相似外,还要求出 P 和 Λ,使 $P^{-1}AP=\Lambda$,这时就必须求出或知道特征值和特征向量.

相似变换矩阵 P 的 n 个列向量恰为 A 的 n 个线性无关的特征向量,对角阵 Λ 的对角线上元素恰是 A 的 n 个特征值,并且 P 的列向量的顺序与 Λ 的对角线上元素顺序相对应.

例 8 矩阵 $A=\begin{bmatrix}-4&-10&0\\1&3&0\\3&6&1\end{bmatrix}$能否与对角阵相似?如果能,试求可逆阵 P,化 A 为对角阵.

解 (i)A 的特征多项式$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$,故其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$. 对于 $\lambda_1=\lambda_2=1$,解方程组$(\lambda_1E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$得到基础解系为 $\alpha_1=[-2,1,0]^T,\alpha_2=[0,0,1]^T$. 对于 $\lambda_3=-2$,解$(\lambda_3E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系为 $\alpha_3=[5,-1,-3]^T$. A 的线性无关的特征向量的个数与 A 的阶数相等,故 A 与对角阵相似.

(ii)令 $P=[\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2]$,易验证有 $P^{-1}AP=\text{diag}(1,-2,1)$. P 为所求.

注意 (1)对角元 λ_i 的排列次序与其特征向量 α_i 的排列次序是一致的. (2)由于基础解系不唯一,满足上式的可逆阵 P 不唯一,但总有 $P^{-1}AP=\text{diag}(1,-2,1)$.

(二)不与对角阵相似的证法

可用反证法证之，也可用与对角阵相似的必要条件证之．为此常证 n 阶矩阵没有 n 个线性无关的特征向量，或证存在某个 k_i 重特征值 λ_i，使

$$\text{秩}(\lambda_i E-A)\neq n-k_i \quad \text{即}\ n-\text{秩}(\lambda_i E-A)\neq k_i.$$

例 9 $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ 是否相似？

解 A 与 B 有相同的特征值，如果 B 能与对角阵相似，则 B 与 A 相似．因 B 有 3 重特征值，$k_1=3$，而

$$\text{秩}(3E-B)=2\neq n-k_1=3-3=0,$$

故 B 不与对角阵相似，从而 B 与 A 不相似．

例 10[1997 年 1] 已知 $\xi=[1,1,-1]$ 是矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{bmatrix}$ 的一个特征向量．(1)试确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值；(2)问 A 能否相似于对角阵，试说明理由．

解 (1)在 §5.1 例 6 中已求出 $a=-3,b=0,\lambda=-1$．

(2)**解法一** 由 $A=\begin{bmatrix}-2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{bmatrix}$ 得到

$|\lambda E-A|=(\lambda+1)^3$，故 $\lambda_1=-1$ 为 A 的三重特征值．因

$$\text{秩}(\lambda_1 E-A)=\text{秩}(-E-A)=2\neq n-k_1=3-3=0,$$

故矩阵 A 不与对角阵相似．

(2)**解法二** 解 $(\lambda_1 E-A)X=(-E-A)X=\mathbf{0}$，因

$$-E-A=\begin{bmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

其基础解系只含一个解向量 $\alpha=[-1,-1,1]^{\mathrm T}$，从而属于 $\lambda_1=-1$ 的线性无关的特征向量只有一个，不等于 λ_1 的重数 3，故 A 不与

对角阵相似.

注意 (5.4.1)式还可用来证明矩阵 A 不与对角阵相似.

例 11 若 n 阶方阵 $A\neq O$,但 $A^k=O$(k 为正整数),证明 A 不与对角矩阵相似.

证 用反证法证之.如果 A 与对角矩阵相似,则存在可逆阵 P,使

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\ (\lambda_i\text{ 为 }A\text{ 的特征值}),$$

因而
$$P^{-1}A^kP=\mathrm{diag}[\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k].$$

由 $A^k=O$ 知道 A^k 的所有特征值 $\lambda_i^k=0(i=,1,2,\cdots,n)$,从而 $P^{-1}AP=O$,故 $A=O$,这与 $A\neq O$ 矛盾.所以 A 不与对角阵相似.

(三)与非对角阵相似的证法

常用的证法有两种,分述于下:

证法一 根据相似的定义证明.根据定义证 A 相似于 B(记为 $A\sim B$),关键在于找出可逆阵 P,使下式成立:

$$P^{-1}AP=B. \tag{5.4.3}$$

例 12[5.6] 设 A,B 都是 n 阶方阵,且 $|A|\neq0$,证明 AB 与 BA 相似.

证 要证 $AB\sim BA$,只要找到可逆阵 P,使 $P^{-1}ABP=BA$ 即可.令 $P=A$,因 $|A|\neq0$,故 P 为可逆阵,且有

$$P^{-1}(AB)P=A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)BA=BA,$$

故 AB 与 BA 相似.

例 13 若 A 可逆,且 $A\sim B$,证明 $A^*\sim B^*$.

证 $A\sim B$,A 可逆,则 B 也可逆,事实上,因存在可逆阵 P_1,使 $P_1^{-1}AP_1=B$,对等式两边取行列式,则 $|B|\neq0$.对等式两边求逆得到 $P_1^{-1}A^{-1}P_1=B^{-1}$,从而 $A^{-1}\sim B^{-1}$.因

$$A^*=|A|A^{-1},B^*=|B|B^{-1},$$

由 $A\sim B$,有 $|A|=|B|$(习题 5.2 第 4 题).于是在 $P_1^{-1}A^{-1}P_1=B^{-1}$两边同乘以 $|A|$,得

$$P_1^{-1}|A|A^{-1}P_1=|A|B^{-1}=|B|B^{-1},$$

即 $P_1^{-1}A^*P_1=B^*$，故 $A^*\sim B^*$.

例 14 如果 $A\sim B,C\sim D$，证明

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}B & O\\ O & D\end{bmatrix}.$$

证 因 $A\sim B$，故存在可逆阵 P_1，使 $B=P_1^{-1}AP_1$. 又因 $C\sim D$，故存在可逆阵 P_2，使 $D=P_2^{-1}CP_2$，令 $P=\begin{bmatrix}P_1 & O\\ O & P_2\end{bmatrix}$，则 $|P|=|P_1||P_2|\neq 0$，故 P 可逆，且

$$\begin{aligned}P^{-1}\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}P&=\begin{bmatrix}P^{-1} & O\\ O & P_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O\\ O & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_1 & O\\ O & P_2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}P_1^{-1}AP_1 & O\\ O & P_2^{-1}CP_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & O\\ O & D\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 15 设 $A\sim B$，试证明存在可逆阵 P，使 $AP\sim BP$.

证 因 $A\sim B$，故存在可逆阵 P_1，使 $P_1^{-1}AP_1=B$，即 $A=P_1BP_1^{-1}$. 令 $P=P_1$，且在等式两端右乘 P，则

$$AP=P_1BP_1^{-1}P=P_1BP_1^{-1}P_1=P_1BP_1P_1^{-1}=P_1BPP_1^{-1}.$$

这里用到 $P_1P_1^{-1}=P_1^{-1}P_1=E$，故

$$P_1^{-1}(AP)P_1=BP\text{，即 }AP\sim BP.$$

例 16 设同阶矩阵 A,B 均与对角阵相似，且其特征值一致，则 A 与 B 相似.

证 由题设，存在可逆阵 P_1，使 $P_1^{-1}AP_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\Lambda_1$，又存在可逆阵 P_2，使 $P_2^{-1}AP_2=\mathrm{diag}(\lambda_{i_1},\lambda_{i_2},\cdots,\lambda_{i_n})=\Lambda_2$. 即 $A\sim\Lambda_1,B\sim\Lambda_2$. 由本节例 2 可知，由于 Λ_1 与 Λ_2 的对角元素相同，仅是排列次序不同，有 $\Lambda_1\sim\Lambda_2$. 又由相似的对称性得到 $\Lambda_2\sim B$. 于是由相似的传递性得到

$$A\sim\Lambda_1\sim\Lambda_2\sim B\quad\text{即 }A\sim B.$$

证法二 利用上例结论证之. 即证两矩阵均与对角阵相似，且其特征值一致.

上法常用来证明其特征值相同(不一定互异)的两矩阵相似.

例 17 证明下列两 n 阶矩阵 A,B 相似：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}n & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}.$$

证 由 §5.1 例 1 知 A 的特征值为 $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$. 又因 A 为实对称矩阵，故必与对角阵相似.

由 $|B-\lambda E|=(n-\lambda)(-\lambda)^{n-1}$ 知，B 的特征值与 A 的相同.

解 $(\lambda_1 E-B)X=\mathbf{0}$，易求得 B 的属于 $\lambda_1=n$ 的线性无关的特征向量只有一个，解 $(\lambda_2 E-B)X=\mathbf{0}$，易求得 B 的属于 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$ 的线性无关的特征向量共有 $n-1$ 个，因而 B 有 n 个线性无关的特征向量，故 B 也与对角阵相似，由例 16 之结论知 $A\sim B$.

例 18 设 n 阶方阵 A 的 n 个特征值互异，B 与 A 有完全相同的特征值，证明有非奇异矩阵 P 及另一矩阵 R，使 $A=PR,B=RP$.

证 由例 16 可知 $A\sim B$，于是存在可逆阵 P，使

$$P^{-1}AP=B,\text{则 } A=P(BP^{-1}),B=(P^{-1}A)P.$$

又由 $P^{-1}AP=B$，得到 $P^{-1}A=BP^{-1}$. 令 $P^{-1}A=BP^{-1}=R$. 例得证.

习　题　5.4

1. 若 n 阶方阵 A 可对角化，则 $f(A)$ 可对角化；当 A 可逆时，A^{-1} 也可对角化.

2. 若 $bc>0$，则二阶实矩阵 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 可对角化.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，试证 A 不能对角化.

4. 设 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$，且 $a_{ij}=1(i,j=1,2,\cdots,n)$，证明 A 可对角化.

5. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ 与 $B=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&3\end{bmatrix}$ 是否相似？为什么？

6. 下列矩阵 A 是否与对角矩阵 Λ 相似？若相似，求出 Λ 与相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$. 已知

$$A=\begin{bmatrix}7&-12&6\\10&-19&10\\12&-24&13\end{bmatrix}.$$

7. [1999 年 3]　设 A、B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$.　　(B) A 与 B 都相似于一个对角阵.

(C) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

(D) 对任一意常数 t，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

8. 设 3 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-6&2\end{bmatrix}$，$A$ 与 B 是否相似？

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&4&x\\-3&-3&5\end{bmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，又已知特征值 $\lambda_1=2$ 为其二重特征值，$\lambda_2=6$，求 x.

10. 设 n 阶矩阵 A，B 都有 n 个互异特征值，且这两组特征值一致，证明 $A\sim B$.

11. 判断矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&5&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&5&0\\2&1&2\end{bmatrix}$ 是否相似？

§5.5　方阵高次幂的简便求(证)法

一般说来，求一个方阵的高次幂是一件比较麻烦的事情，尤其是当方阵的阶数和(或)方幂的次数较高时，计算十分繁杂. 但如矩阵能与对角矩阵相似，就能简化其高次方幂的计算.

法一　利用相似对角化求之

A 与对角阵 Λ 相似时，存在可逆阵 P，使

$$A^k=P\Lambda^k P^{-1}(k\text{ 为自然数}). \tag{5.5.1}$$

按上式计算 A^k 是将 A 的高次幂的计算转化为对角矩阵 Λ 的高次幂的计算，显然后者的计算较前者简便得多.

例 1[2.17]　设 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $P=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，求 A^{11}.

解　由题设知 $A=P\Lambda P^{-1}$，$A^2=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})=P\Lambda^2P^{-1}$，$A^3=P\Lambda^3P^{-1}$，…，$A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}$.

而 $P^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$\Lambda^{11}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{11}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{bmatrix}$，故

$$\begin{aligned}A^{11}=P\Lambda^{11}P^{-1}&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2^{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & -1\end{bmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1+2^{13} & 4+2^{13}\\ -1-2^{11} & -4-2^{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2731 & 2732\\ -683 & -684\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 2　已知 $A=\begin{bmatrix}1/4 & -1 & 2\\ 0 & 1/5 & 0\\ 0 & 0 & 1/6\end{bmatrix}$，求 $\lim\limits_{n\to+\infty}A^n$.

解　显然 A 有三个互异特征值 $1/4,1/5,1/6$，故 A 与对角阵相似. 于是存在可逆阵 P 使

$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1/4,1/5,1/6)$，即 $A=P\mathrm{diag}(1/4,1/5,1/6)P^{-1}$.

因而，由(5.5.1)式得到 $A^n=P\mathrm{diag}((1/4)^n,(1/5)^n,(1/6)^n)P^{-1}$.

故
$$\lim_{n\to+\infty}A^n=0.$$

例 3　已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，求 A^n.

解　由 $|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+1)=0$ 得到 A 的特征值为 $\lambda_1=$

$5, \lambda_2=-1$. A 的特征值互异，A 与对角阵相似. 解 $(\lambda_1 E-A)X=0$，$(\lambda_2 E-A)X=0$ 分别得到线性无关的解向量 $\alpha_1=[1,2]^T$，$\alpha_2=[-1,1]^T$. 取 $P=[\alpha_1,\alpha_2]=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，则 $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$.

由(5.5.1)式得到

$$\begin{aligned}A^n&=P\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}^n P^{-1}\\ &=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}5^n-2(-1)^{n+1} & 5^n+(-1)^{n+1}\\ 2\cdot 5^n-2(-1)^n & 2\cdot 5^n+(-1)^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

解毕

为准确计算 A 的高次幂，须注意以下两点：

(5.5.1)式右端最前矩阵是 P（不是 P^{-1}），最后矩阵是 P^{-1}（不是 P）；其次要注意，求出矩阵 P 的逆矩阵时，一定要验证其正确性，即验证 $PP^{-1}=E$ 是否成立. A^n 的计算失误常由于 P^{-1} 的计算不正确所致.

利用(5.5.1)式计算矩阵 A 的高次幂，还会遇见另一种情况：已知 A 能写成三矩阵的连乘积，不妨设 $A=P_1BP_2$，其中 B 为对角矩阵或是其 n 次幂易计算的矩阵，要求计算 A^n（n 为正整数）.

如何计算呢？常考察 P_1 与 P_2 是否互为逆矩阵，如果是，则 $P_2=P_1^{-1}$，于是有 $A=P_1BP_1^{-1}$. 因而 $A^n=P_1B^nP_1^{-1}$.

例 4 利用等式

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\ 35 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$$

计算

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\ 34 & -12\end{bmatrix}^5.$$

解 根据两调一除的方法，可观察出

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-7 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix},$$

因而有

$$\begin{bmatrix}17 & -6\\35 & -12\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^5 & 0\\0 & 3^5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\5 & 7\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}3197 & -1266\\7385 & -922\end{bmatrix}.$$

法二 利用方阵的高次幂与特征值、特征向量的下述关系求之：

$$A^n\alpha_i=\lambda_i^n\alpha_i(i=1,2,\cdots,n), \tag{5.5.2}$$

其中 α_i 是 n 阶矩阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量.

这样避免直接计算 A^n，极大地简化计算.

(5.5.2)式常用来求方阵高次幂 A^n 与列向量 β 的乘积 $A^n\beta$. 为此先将 β 用线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合表示.

例 5[1992 年 1,2] 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\alpha_1=[1,1,1]^T,\ \alpha_2=[1,2,4]^T,\ \alpha_3=[1,3,9]^T.$$

(1)将向量 $\beta=[1,1,3]^T$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(2)求 $A^n\beta$(n 为自然数).

解法一 (1)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，β 可唯一地表为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合 $\beta=2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$. 这是因为经初等行变换得到

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(2)利用 $A^n\alpha_1=\lambda_1^n\alpha_1,A^n\alpha_2=\lambda_2^n\alpha_2,A^n\alpha_3=\lambda_3^n\alpha_3$ 得到

$$A^n\beta=A^n(2\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3)=2\lambda_1^n\alpha_1-2\lambda_2^n\alpha_2+\lambda_3^n\alpha_3.$$

由题设，易求得 $\lambda_1^n\alpha_1=[1,1,1]^T$；

$$\lambda_2^n\alpha_2=[2^n,2^{n+1},2^{n+2}],\quad \lambda_3^n\alpha_3=[3^n,3^{n+1},3^{n+2}].$$

将它们代入 $A^n\beta$ 的表示式中得到

$$A^n\beta=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

解法二 因 A 的特征值互异，故 A 与对角阵相似. 令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，则 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1,2,3)$. 由(5.5.1)式得到

$$A^n=P[\mathrm{diag}(1,2,3)]^nP^{-1},$$

因而

$$A^n\beta=P\mathrm{diag}(1,2^n,3^n)P^{-1}\cdot\beta=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}.$$

法三 二项展开法

当方阵 A 中主对角线上的元素相同时，可用上法求其高次幂. 为此将 A 分解为 $A=kE+A_1$，其中 A_1 为幂零矩阵(参阅 §5.1 例 9)，其高次幂易求出. 又因 kE 与 A_1 可交换，故可用方阵的二项式定理：

$$A^n=(kE+A_1)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^iA_1^i(kE)^{n-i}\qquad(5.5.3)$$

求出 A^n. 值得注意的是，一般因 $A_1A_2\neq A_2A_1$，故

$$(A_1+A_2)^n\neq\sum_{i=0}^{n}C_n^iA_1^iA_2^{n-i}.$$

(5.5.3)式常用来计算主对角元素相同的上(或下)三角方阵的高次幂.

例 6[2.8] 设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$，求 $A^n(n\geqslant2$，自然数).

解 因 A 为主对角元之相同的上三角矩阵，可用(5.5.3)式求出 A^n. 因

$$\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\lambda E+B,$$

$B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$为幂零矩阵(见§5.1例9),必存在某正整数$k$,使$A^k=O$.事实上

$$B^2=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$B^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

注意到 $B^k=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}^k=O(k\geqslant 3)$,

故
$$\begin{aligned}A^n&=(\lambda E+B)^n=(\lambda E)^n+c_n^1(\lambda E)^{n-1}B+c_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2+\\&\quad c_n^3(\lambda E)^{n-3}B^3+\cdots\\&=(\lambda E)^n+c_n^1(\lambda E)^{n-1}B+c_n^2(\lambda E)^{n-2}B^2\\&=\begin{bmatrix}\lambda^n&0&0\\0&\lambda^n&0\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&c_n^1\lambda^{n-1}&0\\0&0&c_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&c_n^2\lambda^{n-2}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}&c_n^2\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&c_n^1\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

法四　递推法

其步骤为:(1)令$n=2,3,4$,求出A^2,A^3,A^4;

(2)归纳A^n的一般表示式;

(3)用数学归纳法证明A^n的一般表示式的正确性(这一步常省略).

例 7[2.8]　设 $A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}$,求$A^n$($n\geqslant 2$,自然数).

解 (1)$n=2$时，有

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\0 & \lambda^2 & 2\lambda\\0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2 & c_2^1\lambda^{2-1} & c_2^2\lambda^{2-2}\\0 & \lambda^2 & c_2^1\lambda^{2-1}\\0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$$

(2)归纳 A^n 的一般表示式为

$$A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & c_n^1\lambda^{n-1} & c_n^2\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & c_n^1\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

(3)用数学归纳法证明上式成立.为此假设命题对 k 成立，即

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & c_k^1\lambda^{k-1} & c_k^2\lambda^{k-2}\\0 & \lambda^k & c_k^1\lambda^{k-1}\\0 & 0 & \lambda^k\end{bmatrix}.$$

下证上式对 $k+1$ 也成立.事实上

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^k & c_k^1\lambda^{k-1} & c_k^2\lambda^{k-2}\\0 & \lambda^k & c_k^1\lambda^{k-1}\\0 & 0 & \lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1} & \lambda^k+c_k^1\lambda^k & c_k^1\lambda^{k-1}+c_k^2\lambda^{k-1}\\0 & \lambda^{k+1} & \lambda^k+c_k^1\lambda^k\\0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1} & c_{k+1}^1\lambda^k & c_{k+1}^2\lambda^{k-1}\\0 & \lambda^{k+1} & c_{k+1}^1\lambda^k\\0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{bmatrix},$$

由归纳原理知命题对一切自然数 n 成立.

例 8 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$,求 A^k.

解 用递推法求之,易求得

$$A^2=A\cdot A=4E=2^2E, A^3=A^2\cdot A=2^2E\cdot A=2^2A.$$

故当 k 为偶数时,有

$$A^k=(A^2)^{k/2}=(2^2E)^{k/2}=2^kE.$$

当 k 为奇数时,有

$$A^k=A^{k-1}A=(2^{k-1}E)A=2^{k-1}A.$$

法五 用数学归纳法.

例 9 证明 $\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\ 0 & a^n\end{bmatrix}$($n$ 为自然数).

证明一 用数学归纳法证明.

1. $n=1$ 时,等式显然成立.

2. 归纳假定 $n=k$ 时,等式成立.下证 $n=k+1$ 时,等式也成立.事实上

$$\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^{k+1}=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^k & ka^{k-1}\\ 0 & a^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^{k+1} & (k+1)a^k\\ 0 & a^{k+1}\end{bmatrix}.$$

因此,对任意自然数 n 所证等式成立.

证明二 因 $A=\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}$为主对角线上元素相同的上三角矩阵,故可用(5.5.3)式求出 A^n,事实上

$$A=aE+A_1, \text{其中 } A_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

注意到 $A_1^2=0, A_1^k=0(k\geqslant 2)$,由(5.5.3)式即得

$$A^n=(aE+A_1)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^kA_1^k(aE)^{n-k}$$

$$=C_n^0A_1^0(aE)^{n-0}+C_n^1A_1^1(aE)^{n-1}$$

$$=\begin{bmatrix}a^n & 0\\0 & a^n\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0 & a^{n-1}\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\0 & a^n\end{bmatrix}.$$

例 10 若 $A^2=A$,证明

$$(A+E)^k=E+(2^k-1)A(k\text{ 为自然数}).$$

证 当 $k=1$ 时,结论显然成立.归纳假设结论对 $k=m$ 成立,下证对 $k=m+1$ 结论也成立.事实上

$$\begin{aligned}(A+E)^{m+1}&=(A+E)^m(A+E)=[E+(2^m-1)A](A+E)\\&=A+(2^m-1)A^2+E+(2^m-1)A\\&=E+(2^{m+1}-1)A.\end{aligned}$$

结论对一切自然数 k 都成立.

法六 降阶法(分块法)

用降阶法计算,就是通过计算子块的高次幂求出原矩阵的高次幂.常用的子块高次幂的计算结果如下:

$$\begin{bmatrix}a & 1\\0 & a\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\0 & a^n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a & 0\\1 & a\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & 0\\na^{n-1} & a^n\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}i & 0\\0 & i\end{bmatrix}^2=-E,\qquad\begin{bmatrix}0 & i\\i & 0\end{bmatrix}^2=-E,$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}^2=-E,\qquad\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^2=E.$$

例 11 已知 $B=\begin{bmatrix}a & 1 & 0 & 0\\0 & a & 0 & 0\\0 & 0 & b & 0\\0 & 0 & 1 & b\end{bmatrix}$,求 $B^n(n\geqslant2)$.

解 令 $A_1=\begin{bmatrix}a & 1\\0 & a\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}b & 0\\1 & b\end{bmatrix}$,则

$$B=\begin{bmatrix}A_1 & O\\O & B_1\end{bmatrix},\quad B^n=\begin{bmatrix}A_1^n & O\\O & B_1^n\end{bmatrix}.$$

由本节例 9,有 $A_1^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1}\\0 & a^n\end{bmatrix},B_1^n=\begin{bmatrix}b^n & 0\\nb^{n-1} & b^n\end{bmatrix}$,故

$$B^n=\begin{bmatrix}a^n & na^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & a^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & nb^{n-1} & b^n\end{bmatrix}.$$

例 12 设 $A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 0 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求(1) $|A|^{2k}$，(2) A^{2k}.

解 设 $A_1=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix}$，$A_2=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则 $A=\begin{bmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{bmatrix}$.

(1) $|A|=|A_1|\cdot|A_2|=(-25)\cdot 4=-100=-10^2$，故

$$|A|^{2k}=(-10^2)^{2k}=10^{4k}.$$

(2) $A^{2k}=\begin{bmatrix}A_1^{2k} & O\\ O & A_2^{2k}\end{bmatrix}$. 下求 A_1^{2k} 与 A_2^{2k}.

$A_1^2=\begin{bmatrix}25 & 0\\ 0 & 25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{bmatrix}$，

$(A_1^2)^k=\begin{bmatrix}5^2 & 0\\ 0 & 5^2\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}5^{2k} & 0\\ 0 & 5^{2k}\end{bmatrix}$.

A_1 与对角阵相似，也可用对角化方法求出 A_1^{2k}.

下计算 A_2^{2k}. 为此先求 $A_2^2, A_2^{2\cdot 2}, A_2^{2\cdot 3}, \cdots$.

$A_2^2=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{bmatrix}=2^2\begin{bmatrix}1 & 4\cdot 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

$(A_2^2)^2=A_2^2\cdot A_2^2=2^4\begin{bmatrix}1 & 4(1+1)\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(2^2)^2\begin{bmatrix}1 & 4\cdot 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

$(A_2^2)^3=(A_2^2)^2A_2^2=2^6\begin{bmatrix}1 & 4(1+2)\\ 0 & 1\end{bmatrix}=(2^2)^3\begin{bmatrix}1 & 4\cdot 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

故当 k 为正整数时，用数学归纳法易证有

$A_2^{2k}=(A_2^2)^k=(2^2)^k\begin{bmatrix}1 & 4\cdot k\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2^{2k}\begin{bmatrix}1 & 4k\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

(A_2^{2k} 也可用(5.5.3)式求出)

从而 $A^{2k}=\begin{bmatrix} A_1^{2k} & O \\ O & A_2^{2k} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5^{2k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2k} & 4k\cdot 2^{2k} \\ 0 & 0 & 0 & 2^{2k} \end{bmatrix}$.

例 13 已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求 A^{2n+1}（n 为自然数）.

解 令 $H=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，则 $H^2=E$，$A=\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}$，

$$A^2=\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2H^2 & 2H^2 \\ 2H^2 & 2H^2 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} E & E \\ E & E \end{bmatrix},$$

$$A^3=A^2A=2\begin{bmatrix} E & E \\ E & E \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}=4\begin{bmatrix} H & H \\ H & H \end{bmatrix}=2^2A,$$

$$A^5=A^3\cdot A^2=2^2A\cdot A^2=2^2\cdot A^3=2^4A.$$

归纳假设 $A^{2k+1}=2^{2k}A$，下证 $A^{2k+3}=2^{2k+2}A$. 事实上

$$A^{2k+3}=A^{2k+1}\cdot A^2=2^{2k}A^3=2^{2k+2}A \quad (k\text{ 为自然数}),$$

故对任意大于或等于 3 的奇数 $2n+1$ 有

$$A^{2n+1}=2^{2n}A \quad (n\text{ 为自然数}).$$

习 题 5.5

1.[2.7] 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}$，求 $A^2,A^3,\cdots,A^k$.

2. 证明 $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

3. 利用等式 $\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$，计算

$$\begin{bmatrix} -9 & 4 \\ -25 & 11 \end{bmatrix}^n.$$

4.[2.21] 设 $A=\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}$，求 $|A^8|$ 及 A^4.

5. 设三阶矩阵 A 的特征值分别为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1,\lambda_3=3$，属于它们的特征向量分别为

$\alpha_1=[1,-1,0]^T$，$\alpha_2=[1,-1,1]^T$，$\alpha_3=[0,1,-1]^T$. 又 $\beta=[3,-2,0]^T$.

(1)将 β 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出；

(2)求 $A^n\beta$(n 为自然数).

6.[1988 年 1,2] 已知 $AP=PB$，求 A 与 A^5，其中

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix},P=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}.$$

§5.6 $P^{-1}AP=\Lambda$ 中已知两者如何求第三者

(一)已知 n 阶矩阵 A 的全部特征值，即已知对角矩阵 Λ 及其特征向量，如何求矩阵 A.

下分两种情况讨论.

(Ⅰ)已知 A 的全部特征值和 A 的全部特征向量(n 个线性无关的特征向量)，有下述几种方法求 A.

法一 求逆法

设 A 的全部特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 及其 n 个线性无关的特征向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，先由特征值互异或由线性无关的特征向量的个数判断 A 与对角阵 Λ 相似，再令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，求出逆矩阵 P^{-1}，最后可按下式求 A：

$$A=P\Lambda P^{-1}=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}. \tag{5.6.1}$$

上面求 A 的(5.6.1)式也可直接利用特征值、特征向量的定义得到. 事实上，由 $A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n].$$

如 A 与对角阵相似，则 A 有 n 个线性无关的特征向量，从而 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 可逆. 于是有

$$A=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n][\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1} \tag{5.6.2}$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]^{-1}$$

$$=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P^{-1}.$$

例 1[5.7][1995 年 5] 设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$，其中列向量 $\alpha_1=[1,2,2]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[2,-2,1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[-2,-1,2]^{\mathrm{T}}$，求矩阵 A.

解法一 因 A 的特征值互异，故 A 与对角阵相似，令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 P 可逆，且

$$P^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix},$$

故 $$A=P\mathrm{diag}(1,2,3)P^{-1}=\begin{bmatrix}7/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 5/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 2\end{bmatrix}.$$

解法二 由 $A\alpha_i=i\alpha_i(i=1,2,3)$ 得到

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3].$$

由(5.6.2)式即得

$$A=[\alpha_1,2\alpha_2,3\alpha_3][\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 4 & -6\\ 2 & -4 & -3\\ 2 & 2 & 6\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7/3 & 0 & -2/3\\ 0 & 5/3 & -2/3\\ -2/3 & -2/3 & 2\end{bmatrix}.$$

例 2 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 3 阶矩阵 A 的特征值，其应的特征向量分别为 $\alpha_1=[1,1,1]^T,\alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[0,0,1]^T$，求证

$$(A^n)^T=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & \lambda_1^n-\lambda_2^n & \lambda_1^n-\lambda_2^n \\ 0 & \lambda_2^n & \lambda_2^n-\lambda_3^n \\ 0 & 0 & \lambda_3^n\end{bmatrix}.$$

证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，因而 A 与 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 相似. 令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，由(5.6.1)式得到

$$\begin{aligned}(A^n)^T&=(P\mathrm{diag}(\lambda_1^n,\lambda_2^n,\lambda_3^n)P^{-1})^T\\&=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^n&0&0\\0&\lambda_2^n&0\\0&0&\lambda_3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\right)^T\\&=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & \lambda_1^n-\lambda_2^n & \lambda_1^n-\lambda_2^n \\ 0 & \lambda_2^n & \lambda_2^n-\lambda_3^n \\ 0 & 0 & \lambda_3^n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

法二 转置法

如果所给 A 的全部特征向量两两正交，将其单位化，令 $\eta_i=\alpha_i/\|\alpha_i\|\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $Q=[\eta_1,\cdots,\eta_n]$为正交矩阵，于是有 $Q^{-1}=Q^T$，因而不需求逆矩阵，只须求出 Q 的转置矩阵 Q^T，即可按下式求出 A：

$$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q^T. \tag{5.6.3}$$

例 3[5.7] 设 3 阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$ 及对应的特征向量依此如下：

$$\alpha_1=[1,2,2]^T,\alpha_2=[2,-2,1]^T,\alpha_3=[-2,-1,2]^T.$$

试求 A.

解法一 易验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交. 将其单位化得

$$\eta_1=[1/3,2/3,2/3]^T,\quad \eta_2=[2/3,-2/3,1/3]^T,$$
$$\eta_3=[-2/3,-1/3,2/3]^T.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，Q 为正交阵，按(5.6.3)式求 A，得

$$A=\begin{bmatrix}-1/3 & 0 & 2/3\\ 0 & 1/3 & 2/3\\ 2/3 & 2/3 & 0\end{bmatrix}. \tag{5.6.4}$$

解法二 A 与对角阵相似，求出 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$和 P^{-1}，按(5.6.1)式求 A，得到(5.6.4)式.

法三 待定元素法

例 4[5.7] 试用待定元素法求上例中的矩阵 A.

解 设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$，由

$$A\alpha_1=\alpha_1,A\alpha_2=0\alpha_2,A\alpha_3=(-1)\alpha_3,$$

可得到分别以 A 的第 1 行，第 2 行，第 3 行的 3 个元素为未知数的三个方程组：

$$\begin{cases}a_{11}+2a_{12}+2a_{13}=1;\\ 2a_{11}-2a_{12}+a_{13}=0;\\ -2a_{11}-a_{12}+2a_{13}=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}a_{21}+2a_{22}+2a_{23}=2;\\ 2a_{21}-2a_{22}+a_{23}=0;\\ -2a_{21}-a_{22}+2a_{23}=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{31}+2a_{32}+2a_{33}=2;\\ 2a_{31}-2a_{32}+a_{33}=0;\\ -2a_{31}-a_{32}+2a_{33}=-2.\end{cases}$$

上面三个方程组的系数矩阵相同，设为 B，则有

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -2 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

因此
$$\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{12}\\ a_{13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ 6\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}a_{21}\\ a_{22}\\ a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}0\\ 3\\ 6\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

由此得到所求的矩阵为(5.6.4)式.

(Ⅱ)给出实对称矩阵 A 的全部特征值,且给出部分(r 个)线性无关的特征向量(线性无关的特征向量的个数 r 小于 n). 为求 A,必须根据实对称矩阵不同特征值的特征向量正交的性质求出其余 $n-r$ 个线性无关的特征向量. 然后仿(Ⅰ)中所述方法求出实对称矩阵 A.

例 5[1995 年 1,2] 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$. 对应于 λ_1 的特征向量为 $\alpha_1=[0,1,1]^{\mathrm{T}}$,求 A.

解法一 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量 α_2,α_3,它们都与 α_1 正交,所以为求 α_2,α_3 只须解线性方程组

$$\alpha_1^{\mathrm{T}}X=0 \quad 即[0,1,1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0.$$

显然其基础解系为 $\alpha_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[0,-1,1]^{\mathrm{T}}$. 且它们为对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的两个线性无关的特征向量,故 $A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=\alpha_3$. 于是有

$$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3].$$

因 $$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$ 故

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

解法二 注意到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交,将其单位化得

$$\eta_1=[0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{\mathrm{T}},\eta_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_3=[0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$,则 Q 为正交矩阵,于是 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}$,

$$A=Q\mathrm{diag}(-1,1,1)Q^{-1}=Q\mathrm{diag}(-1,1,1)Q^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot$$

$$\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\1 & 0 & 0\\0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1\\0 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

例 6[5.8] 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 6,3,3;与特征值 6 对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$,求 A.

解法一 A 为实对称矩阵,必与对角阵相似.又因 3 是 A 的 2 重特征值,由(5.4.2)式知 A 的属于特征值 3 的线性无关的特征向量应有两个.它们均与 $\boldsymbol{p}_1$ 正交.解 $\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}X=\boldsymbol{0}$ 得到属于 3 的线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_2=[-1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{p}_3=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$.由

$$A\boldsymbol{p}_1=6\boldsymbol{p}_1,A\boldsymbol{p}_2=3\boldsymbol{p}_2,A\boldsymbol{p}_3=3\boldsymbol{p}_3,$$

得到

$$A[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]=[6\boldsymbol{p}_1,3\boldsymbol{p}_2,3\boldsymbol{p}_3],$$

即 $A=[6\boldsymbol{p}_1,3\boldsymbol{p}_2,3\boldsymbol{p}_3][\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3]^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}6 & -3 & -3\\6 & 3 & 0\\6 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/3\\-1/3 & -1/3 & -1/3\\-1/3 & -1/3 & 2/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\1 & 4 & 1\\1 & 1 & 4\end{bmatrix}. \tag{5.6.5}$$

解法二 将 p_1,p_2,p_3 正交化，单位化，得

$$\eta_1=[1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}]^{T},$$

$$\eta_2=[-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2}]^{T},$$

$$\eta_3=[1/\sqrt{6},(-2)/\sqrt{6},1/\sqrt{3}]^{T}.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则 Q 为正交阵，有 $Q^{-1}=Q^{T}$. 由(5.6.3)式易算得(5.6.5)式.

解法三 用待定元素法求之. 设所求的实对称矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\text{（}A\text{ 中元素均为待求元素）.}$$

由 $Ap_i=\lambda_i p_i(i=1,2,3)$，得到

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_2 & b_2 & b_3\\ a_3 & b_3 & c_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

解上述各方程组，得到

$$a_1=4,a_2=1,a_3=1,b_2=4,b_3=1,c_3=4.$$

显然，所求出的实对称矩阵 A 与(5.6.5)式相同.

（二）已知矩阵 A 与对角阵 Λ 相似，如何求出相似变换矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

求法比较简单，只须分别求出 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量，以其中线性无关的特征向量 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为列向量所作成

的矩阵 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$即为所求.如果要求 P 为正交矩阵,再将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 正交化,单位化得到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,则以 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为列向量所作的矩阵 $Q=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]$即为所求的正交矩阵.

值得注意的是:由于特征向量不唯一,矩阵 P 也不唯一,但 $P^{-1}AP=\Lambda$ 总成立.

例 7 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}$,求一矩阵 P,使 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$.

解法一 显然,5,-2 为 A 的两个互异特征值,A 与对角阵相似.

解 $(5E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,$(-2E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,分别求得属于 $\lambda_1=5$ 的特征向量 $\alpha_1=[1,1]^{\mathrm{T}}$,属于 $\lambda_2=-2$ 的特征向量 $\alpha_2=[(-4)/3,1]^{\mathrm{T}}$.

令 $P=[\alpha_1,\alpha_2]$,则 P 即为所求,因 P 为可逆矩阵,且经验算满足 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(5,-2)$.

解法二 设 $P=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$,由 $AP=P\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$,得

$$\begin{cases}x_1+4x_3=5x_1;\\ x_2+4x_4=-2x_2;\\ 3x_1+2x_3=5x_3;\\ 3x_2+2x_4=-2x_4.\end{cases}\quad \text{解之得}\begin{cases}x_1=x_1;\\ x_2=x_2;\\ x_3=x_1;\\ x_4=(-3/4)x_2.\end{cases}$$

故所求的可逆阵为

$$P=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_1 & (-3/4)x_2\end{bmatrix}\quad (x_1x_2\neq 0).$$

若取 $x_1=1,x_2=-4/3$,得解法一中的矩阵 P.

例 8 设 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$是 n 个实数,方阵

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}.$$

1)若 λ 是 C 的特征值,试证 $\alpha=[1,\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1}]^T$ 是对应于 λ 的特征向量.

2)若 C 的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 两两互异,求矩阵 P,使 $P^{-1}CP$ 为对角矩阵.

证 1)矩阵 C 的特征多项式为 $|\lambda E-C|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$. 因 λ 为 C 的特征值,故 $|\lambda E-C|=0$,于是得到

$$\lambda^n=-(a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0),$$

而

$$\begin{aligned}C\alpha&=[\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1},-(a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)]^T\\&=[\lambda,\lambda^2,\cdots,\lambda^{n-1},\lambda^n]^T=\lambda\alpha.\end{aligned}$$

因而 α 是对应于 λ 的特征向量,故 $\alpha_i=[1,\lambda_i,\cdots,\lambda_i^{n-1}]^T$ 为属于 λ_i 的特征向量($i=1,2,\cdots,n$).

2)因 λ_i 互异,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,作 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,则 P 即为所求. 因易验证有 $P^{-1}CP=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$. 事实上,

$$\begin{aligned}CP&=C[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]=[C\alpha_1,\cdots,C\alpha_n]\\&=[\lambda_1\alpha_1,\cdots,\lambda_n\alpha_n]\\&=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\\&=P\text{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).\end{aligned}$$

证毕

下面介绍 A 相似于非对角阵 B 时,如何求 P,使 $P^{-1}AP=B$.

因 A 与 B 相似,有相同的特征值,设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 分别求出 A 与 B 的属于特征值 λ_i 的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,

作

$$P_1=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n],P_2=[\beta_1,\cdots,\beta_n],$$

则

$$P_1^{-1}AP_1=\text{diag}[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]=P_2^{-1}BP_2.$$

令 $P_1P_2^{-1}=P$,则有 $P^{-1}AP=B$,故 P 即为所求.

如果要求 P 为正交矩阵,将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 正交化,单位化,分别得到 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 与 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$,作矩阵

$$Q_1=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n],Q_2=[\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n]$$

$$Q_1^{-1}AQ_1=\text{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=Q_2^{-1}BQ_2.$$

于是 $Q=Q_1\cdot Q_2^{-1}$ 使 $Q^{-1}AQ=B$,则 Q 即为所求.

例 9 设 A,B 都是实对称矩阵，证明存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$ 的充要条件是 A 与 B 有相同的特征值.

证 先证充分性. 设 A 与 B 相同的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 由于 A,B 为实对称矩阵，分别存在正交阵 Q_1,Q_2，使

$$Q_1^{T}AQ_1=Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

$$Q_2^{T}AQ_2=Q_2^{-1}AQ_2=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

因而 $Q_1^{-1}AQ_1=Q_2^{-1}AQ_2$　即 $(Q_1Q_2^{-1})^{-1}A(Q_1Q_2^{-1})=B$.

令 $Q=Q_1Q_2^{-1}$，则 Q 为正交阵，且使 $Q^{-1}AQ=B$.

下证必要性. 由 $Q^{-1}AQ=B$，知 A 与 B 相似，故 A 与 B 有相同的特征值.

例 10 设有 2 阶矩阵 A,B 如下：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 0\end{bmatrix},$$

试求正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$.

解 A,B 的特征值相等，为 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$. 由上例知存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$. 下求 Q.

A 的属于 $\lambda_1=3,\lambda_2=-1$ 的线性无关的特征向量分别为 $\alpha_1=[1,1]^{T},\alpha_2=[1,-1]^{T}$. A,B 为实对称矩阵，$\lambda_1\neq\lambda_2$，故 α_1,α_2 正交. 将其单位化得

$$\eta_1=(1/\sqrt{2})[1,1]^{T},\eta_2=(1/\sqrt{2})[1,-1]^{T}.$$

令 $Q_1=[\eta_1,\eta_2]$，则 $Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{diag}(3,-1)$.

同法可求，B 的属于 λ_1,λ_2 的单位正交特征向量为

$$\delta_1=(1/2)(\sqrt{3},1)^{T},\delta_2=(1/2)(1,-\sqrt{3})^{T}.$$

令 $Q_2=[\delta_1,\delta_2]$，则 $Q_2^{-1}BQ_2=\mathrm{diag}(3,-1)$，由

$$Q_1^{-1}AQ_1=\mathrm{diag}(3,-1)=Q_2^{-1}BQ_2,$$

得到 $(Q_1Q_2^{-1})^{-1}AQ_1Q_2^{-1}=B$，因而 $Q=Q_1Q_2^{-1}$ 为所求的正交矩阵.

(三)已知矩阵 A 及相似变换矩阵 P，如何求对角矩阵 Λ，使 $P^{-1}AP=\Lambda$.

只须求出 A 的特征值即可，不必直接计算 $P^{-1}AP$. 这是因为 Λ 上的主对角元就是 A 的特征值. 这类问题常称为求已知矩阵的相似标准形.

反之，如果已知对角矩阵 Λ，满足 $P^{-1}AP=\Lambda$，当然也就知道 A 的特征值为 Λ 的主对角元素.

例 11 已知 3 阶实可逆矩阵 A 和 B，A 的特征值为 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1}$，此处 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为互异正整数. 若 B 的特征值为 $-5,1,7$，且 $B=(A^{-1})^2-6A$，求 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，并写出 A,A^{-1},B 的相似标准形.

解 A 有 3 个互异特征值，与对角矩阵相似，故存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1})$，即 $A=P\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1})P^{-1}$，于是

$$A^{-1}=P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)P^{-1},$$
$$(A^{-1})^2=P\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2)P^{-1},$$
$$-6A=P\mathrm{diag}(-6\lambda_1^{-1},-6\lambda_2^{-1},-6\lambda_3^{-1})P^{-1}.$$

从而
$$\begin{aligned}B&=(A^{-1})^2-6A\\&=P\mathrm{diag}(\lambda_1^2-6\lambda_1^{-1},\lambda_2^2-6\lambda_2^{-1},\lambda_3^2-6\lambda_3^{-1})P^{-1}.\end{aligned}$$

即 $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(\lambda_1^2-6\lambda_1^{-1},\lambda_2^2-6\lambda_2^{-1},\lambda_3^2-6\lambda_3^{-1})$，故 B 与对角阵相似，且其三个特征值 $\lambda_1^2-6\lambda_1^{-1},\lambda_2^2-6\lambda_2^{-1},\lambda_3^2-6\lambda_3^{-1}$ 应分别等于 -5，$1,7$. 因 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为互异正整数，解 $\lambda_1^2-6\lambda_1^{-1}=-5$，即解 $\lambda_1^3+5\lambda_1-6=(\lambda_1-1)(\lambda_1^2+\lambda_1+6)=0$，得 $\lambda_1=1$.

同法解 $\lambda_2^2-6\lambda_2^{-1}=1$ 与 $\lambda_3^2-6\lambda_3^{-1}=7$，分别得 $\lambda_2=2,\lambda_3=3$，因而 A,A^{-1},B 的相似标准形依次为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2^{-1}&0\\0&0&3^{-1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5&0&0\\0&1&0\\0&0&7\end{bmatrix}.$$

例 12 已知 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\mathrm{diag}(1,3,7)$，其中

$$Q=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&(-1)/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&2/\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\0 & 3 & -2\\2 & -2 & 5\end{bmatrix},$$

试求 A 的特征值及特征向量.

解 不难验证 Q 为正交矩阵,故 $Q^T=Q^{-1}$,且

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\text{diag}(1,3,7),$$

因而 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3,\lambda_3=7$;$A$ 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量分别为

$$\eta_1=[(-1)/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}]^T,$$

$$\eta_2=[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0]^T,$$

$$\eta_3=[1/\sqrt{6},(-1)/\sqrt{6},2/\sqrt{6}]^T.$$

例 13[1998 年 3] 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,矩阵 $B=(kE+A)^2$,其中 k 为实数,E 为单位矩阵,求对角矩阵 Λ,使 B 与 Λ 相似,并求 k 为何值时,B 为正定矩阵.

解法一 由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 得到 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$,且 $kE+A$ 的特征值为$(k+2)$(二重)和 k,进而得到 B 的特征值为$(k+2)^2$(二重)和 k^2. 因 A 为实对称矩阵,$kE+A$ 也为实对称矩阵,故 $B=(kE+A)^2$ 也为实对称矩阵,从而 B 必与对角阵相似,且相似对角矩阵 $\Lambda=\text{diag}((k+2)^2,(k+2)^2,k^2)$,于是有 $B\sim\Lambda$.

当 $k\neq-2$,且 $k\neq0$ 时,B 的全部特征值均为正数,这时 B 必为正定矩阵.

解法二 令 $G=\text{diag}(2,2,0)$,因 A 为实对称矩阵,故存在正交矩阵 Q,使 $Q^TAQ=G$,因而 $A=(Q^T)^{-1}GQ^{-1}=QGQ^T$,注意则 $QQ^T=E$,有

$$\begin{aligned}B&=(kE+A)^2=(kQQ^T+QGQ^T)^2\\&=(kQQ^T+QGQ^T)(kQQ^T+QGQ^T)\end{aligned}$$

$$=Q(kE+G)Q^{T}Q(kE+G)Q^{T}=Q(kE+G)^{2}Q^{T}$$
$$=Q\mathrm{diag}((k+2)^{2},(k+2)^{2},k^{2})Q^{T}.$$

于是所求的对角矩阵为 $\Lambda=\mathrm{diag}((k+2)^{2},(k+2)^{2},k^{2})$.

正定性的证明与解法一相同.

注意 有几种变换都能化矩阵 A 为对角矩阵,但其主对角线上的元素不一定就是 A 的特征值.下述结论,注意不要混淆.

(i)实对称矩阵在合同变换下的标准形是对角矩阵,但其主对角线上的元素不一定就是 A 的特征值,例如正定矩阵 A,存在可逆矩阵 P,使 $P^{T}AP=E$,但 P 不一定为正交矩阵,故 $P^{-1}AP=E$ 不一定成立,从而 $1,1,\cdots,1$ 不一定为正定矩阵的特征值;再如(6.1.3)式中 $5,9/5$ 都不是 A^{2} 的特征值,而 1 则是.

(ii)在等价变换下方阵 A 的标准形也是对角矩阵,其主对角线上的元素是 0 或 1,与 A 的特征值毫无关系.

(iii)只有在相似变换下矩阵的标准形(相似对角形,即相似标准形)其主对角线上的元素才是 A 的特征值.因而(i)中的 P 如为正交矩阵时,即合同变换矩阵同时为相似变换矩阵时,其标准形的主对角线上的元素才是 A 的特征值.例如,(6.1.4)式中 1 与 9 都是 A^{2} 的特征值.试比较(6.1.3)与(6.1.4)式.

习　　题 5.6

1.[1997 年 3]　设三阶实对称矩阵 A 的特征值 1,2,3;矩阵 A 的属于特征值 1,2 的特征向量分别是 $\alpha_1=[-1,-1,1]^{T},\alpha_2=[1,-2,-1]^{T}$.

(1)求 A 的属于特征值 3 的特征向量;(2)求矩阵 A.

2.设 $\alpha_1=[-1,0,1,0]^{T}$, $\alpha_2=[0,1,2,0]^{T}$,

$\alpha_3=[0,2,3,0]^{T}$, $\alpha_4=[0,0,1,1]^{T}$,

分别是属于四阶矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=1,\lambda_4=-1$ 的特征向量.求矩阵 A.

3.设 n 阶实对称矩阵 A 是幂等矩阵,且秩 $A=r$,试求 A 的相似标准形,并说明理由.

4. 矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & -6 & 2\end{bmatrix}$ 相似（习题 5.4 第 8 题），试求可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

第六章　二次型

§6.1　标准形化法

(一)二次型的矩阵表示

只含有二次项的 n 元多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2 \quad (6.1.1)$$

称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元二次型,简称二次型．其矩阵表示为 $f=X^{\mathrm{T}}AX$,其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$A=[a_{ij}]_{n\times n}$为对称矩阵,称为二次型 f 的矩阵．

给出二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为(6.1.1)式,可按下法写出二次型 f 的矩阵 A:A 的对角线上的元素 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$为 $x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2$ 的系数,而 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$即为 x_ix_j 的系数的一半．于是给出一个二次型就唯一地对应一个对称矩阵;反之,给出一个对称矩阵,按上述规则也可唯一地确定一个二次型．

例 1　写出下列二次型的矩阵:

(1)[5.11(3)]　$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3-2x_1x_4+6x_2x_3-4x_2x_4$;

(2)$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3$;

(3)$f(x_1,x_2,x_3)=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&4&7\\1&4&5\\5&9&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$.

解　(1)f 是一个 4 元二次型,用矩阵符号可表示为

$$f=X^{\mathrm{T}}AX,其中\ X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}.$$

其矩阵 A 按上述规则写出为一个对称矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 3 & -2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(2) f 是一个 4 元二次型，其矩阵为 4 阶对称矩阵，虽然二次型表示式中某些变元不出现，在写二次型矩阵时仍要考虑这些变元，因此有

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^{\mathrm{T}}AX$，其中 $X=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$，其矩阵 A 为 4 阶对称矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -3/2 & 0\\ 1 & -3/2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

(3) 所给二次型已经写成矩阵形式 $X^{\mathrm{T}}\tilde{A}X$，但 $\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 1 & 4 & 5\\ 5 & 9 & 5\end{bmatrix}$ 不是对称矩阵，因而不是该二次型的矩阵．此时，将 $X^{\mathrm{T}}AX$ 展开按上述规则重新写出该二次型的矩阵为对称矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5/2 & 6\\ 5/2 & 4 & 7\\ 6 & 7 & 5\end{bmatrix}.$$

(二)标准形化法

设有线性变换 $X=PY$，其中 $X=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，$P=[p_{ij}]_{n\times n}$，$Y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$. 当 $|P|\neq 0$ 时，称该线性变换是可逆(或满秩，或非退化)线性变换．

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 经满秩线性变换变成新变量的多个平方项之和的二次型称为 f 的一个标准型．下面介绍标准形化法．

化二次型为标准形大别之有两种方法，一种是用可逆线性变换，另一种是用正交变换．当然正交变换是特殊的一类可逆线性

变换．如果不限于用正交变换，用可逆线性变换化二次型为标准形还有多种常用的方法．下面举例说明之．

（Ⅰ）用可逆线性变换化二次型为标准形

法一　配方法

用配方法化二次型为标准形的关键是消去非平方项并构造新平方项．下分两种情况考虑．

(i)含有平方项及非平方项的二次型，用完全平方公式化之．

二次型含有某变量的平方，先集中含此变量的乘积项，然后配方，化成完全平方，每次只对一个变量配平方，余下的项中不应再出现这个变量．再对剩下的 $n-1$ 个变量同样进行，直到各项全部化成平方项为止．

(ii)二次型中没有平方项，只有非平方项，先用平方差公式，再用配方法化之．

例如，若 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$，则作可逆线性变换：

$$x_i=y_i-y_j,x_j=y_i+y_j,x_k=y_k(k\neq i,j),\tag{6.1.2}$$

化二次型为含平方项的二次项，再按(i)中配方法，化成标准形．

例 2[1996 年 4]　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(1)已知 A 的一个特征值为 3，求 y；

(2)求矩阵 P，使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角矩阵．

解法一　(1)因 $|\lambda E-A|=(\lambda^2-1)[\lambda^2-(y+2)\lambda+2y-1]$，将 $\lambda=3$ 代入得 $|3E-A|=0$．解得 $y=2$．于是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(2)因 $A^{T}=A$，故 $(AP)^{T}(AP)=P^{T}(A^{T}A)P=P^{T}A^{2}P$. 而

$$A^{2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}.$$

考虑二次型

$$\begin{aligned}X^{T}A^{2}X&=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4\\&=x_1^2+x_2^2+5[x_3+(4/5)x_4]^2+(9/5)x_4^2.\end{aligned}$$

$$令\begin{cases}y_1=x_1\\y_2=\quad x_2\\y_3=\qquad x_3+(4/5)x_4\\y_4=\qquad\qquad x_4\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=y_2\\x_3=\quad y_3-(4/5)y_4\\x_4=\qquad\quad y_4\end{cases}$$

取 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-4/5\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，则 $X=PY$，使

$$X^{T}A^{2}X=Y^{T}(P^{T}A^{2}P)Y=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+(9/5)y_4^2.$$

从而矩阵 P 化 $(AP)^{T}(AP)$ 为对角阵：

$$(AP)^{T}(AP)=P^{T}A^{2}P=\mathrm{diag}(1,1,5,9/5).\qquad(6.1.3)$$

解法二 因 A^2 为实对称矩阵，可先求出 A^2 的特征值 $\lambda_1=1$（3 重特征值），$\lambda_2=9$，再分别求出属于它们的特征向量，最后将它们正交化，单位化，得到

$$\eta_1=[1,0,0,0]^{T},\qquad \eta_2=[0,1,0,0]^{T},$$

$$\eta_3=[0,0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{T},\eta_4=[0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{T}.$$

令 $P=[\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4]$，则因 P 为正交矩阵，$P^{-1}=P^{T}$，有

$$P^{-1}A^{2}P=P^{T}A^{2}P=\mathrm{diag}(1,1,1,9).\qquad(6.1.4)$$

注意 比较上述两种解法可知，解法一较简便，解法二是常规解法，因此不能忽视配方法的应用.

法二 合同变换法

用可逆线性变换 $X=PY$ 化二次型 $f=X^{T}AX$ 为标准型的问题等价于找可逆矩阵 P 使 $P^{T}AP$ 为对角阵的问题．

对已知矩阵 A，求可逆阵 P 使 $P^{T}AP=\Lambda$ 为对角阵的问题当然可以把它转化为二次型，用配方法化之，但那样做太麻烦．由于可逆阵 P 可以写成若干个初等方阵 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 的乘积，即 $P=P_1P_2\cdots P_s$，则由 $P^{T}AP=\Lambda$，得到

$$P_s^{T}\cdots P_2^{T}P_1^{T}AP_1P_2\cdots P_s=\Lambda,P=EP_1P_2\cdots P_s. \qquad (6.1.5)$$

根据初等方阵的性质知，右乘 P_i 相当于对矩阵进行一次初等列变换，而左乘 P_i^{T} 相当于再对矩阵作同样的初等行变换．注意到 $P=EP_1P_2\cdots P_s$，则对 E 作与 $P_1,P_2,\cdots,P_s$ 相对应的初等列变换，即可得到线性变换矩阵 P．于是由(6.1.5)式得到用上述特殊的初等变换化二次型为标准形的方法：

在 n 阶二次型矩阵 A 的下方放置一个同阶的单位矩阵 E，得到一个 $2n\times n$ 矩阵．对其施行同样的初等行、列变换(称为合同变换)，把 A 化成对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(g_1,g_2,\cdots,g_n)$，其中的初等列变换把下方单位矩阵 E 化成矩阵 P，即

$$\begin{bmatrix}A\\ \cdots\\ E\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{对 }E\text{ 只施行其中的初等列变换}]{\text{对 }A\text{ 施行同样的初等行、列变换}}\begin{bmatrix}\Lambda\\ \cdots\\ P\end{bmatrix}.$$

设 $\boldsymbol{X}=P\boldsymbol{Y}$，其中 $\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{T}$，$P$ 为所用的满秩线性变换矩阵，此满秩线性变换化 $f=\boldsymbol{X}^{T}A\boldsymbol{X}$ 为标准形 $\boldsymbol{Y}^{T}\Lambda\boldsymbol{Y}$：

$$f=g_1y_1^2+g_2y_2^2+\cdots+g_ny_n^2.$$

上述合同变换法把 A 化对角形及求 P 的两种计算一次完成，因而经常使用．

值得注意的是化 f 为标准形所使用的合同变换不唯一，因而 P 及 Λ 也不唯一．事实上，它们随着所使用的合同变换不同而不．那么如何检验 P 和 Λ 计算的正确性呢？可用 A,P,Λ 三者关系来检验，如果 $P^{T}AP=\Lambda$，计算正确，否则计算有误．

例 3 用合同变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2-2x_1x_3-2x_1x_2+4x_2x_3$$

为标准形，求所用的满秩线性变换，并用矩阵检验.

解 设二次型 f 的矩阵为 A，则

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ E \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 2 行}]{\text{第 1 行的(1/3)}}\left[\begin{array}{ccc} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1/3 & 5/3 \\ -1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 2 列}]{\text{第 1 列的(1/3)}}\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 5/3 \\ -1 & 5/3 & 0 \\ \hdashline 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 3 行}]{\text{第 1 行的(1/3)}}\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ \hdashline 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 3 列}]{\text{第 1 列的(1/3)}}\left[\begin{array}{ccc}3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ \hdashline 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 3 行}]{\text{第 2 行的 5}}\left[\begin{array}{ccc}3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hdashline 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\text{倍加到第 3 列}]{\text{第 2 列的 5}}\left[\begin{array}{ccc}3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ \hdashline 1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\Lambda \\ \cdots \\ P\end{bmatrix}.$$

其中 Λ 为最后的变换矩阵中虚线上方的对角矩阵，P 为下方的满秩矩阵．原二次型经满秩线性变换 $X=PY$ 化为标准形：

$$f=3y_1^2-(1/3)y_2^2+8y_3^2.$$

因 $$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{diag}(3,-1/3,8)=\Lambda,$$

故计算无误，结果正确．

法三　直接选取满秩线性变换．

下面介绍用此法化标准形的两类特殊二次型．

类型 I　不含平方项，且各乘积项(非平方项)的变量彼此都

不相同的二次型．

例 4 设有二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1},$$

试用满秩线性变换把它化为标准形．

解 f 不含平方项，且各乘积项的变量彼此都不相同，利用(6.1.2)式可直接选取如下的满秩线性变换：

$$\begin{aligned} &x_1=y_1+y_{2n}, && x_{2n}=y_1-y_{2n},\\ &x_2=y_2+y_{2n-1}, && x_{2n-1}=y_2-y_{2n-1},\\ &\cdots, && \cdots,\\ &x_n=y_n+y_{n+1}, && x_{n+1}=y_n-y_{n+1}. \end{aligned}$$

即选取满秩线性变换 $X=PY$，其中

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 & 1\\ 0 & 1 & & & & & 1 & 0\\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & -1 & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ 0 & 1 & & & & & -1 & 0\\ 1 & 0 & & & & & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

将 f 化为标准形：

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n-1}^2-y_{2n}^2.$$

类型 Ⅱ 不含平方项，各乘积项的系数为 1，当变量下标由小到大排列时，各相邻乘积项含一相同变量的二次型，即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_n.$$

如何直接选取满秩线性变换化这种二次型为标准形呢?

设 $\qquad y_1=(x_1+x_2+x_3)/2,\ y_2=(x_1-x_2+x_3)/2,$

有 $\qquad y_1^2-y_2^2=x_1x_2+x_2x_3.$

因而用上面的变换可同时化两个相邻乘积项为平方差．于是得到下述直接选取满秩线性变换的方法：

当 n 为奇数时，因 f 含偶数个项，作下列满秩线性变换：

$$\left.\begin{aligned}y_1&=(x_1+x_2+x_3)/2,\\ y_2&=(x_1-x_2+x_3)/2\end{aligned}\right\}\text{化 } x_1x_2+x_2x_3 \text{ 为平方差 } y_1^3-y_2^2,$$

$$\left.\begin{aligned}y_3&=(x_3+x_4+x_5)/2,\\ y_4&=(x_3-x_4+x_5)/2\end{aligned}\right\}\text{化 } x_3x_4+x_4x_5 \text{ 为平方差 } y_3^2-y_4^2,$$

$\cdots$

$$\left.\begin{aligned}y_{n-2}&=(x_{n-2}+x_{n-1}+x_n)/2,\\ y_{n-1}&=(x_{n-2}-x_{n-1}+x_n)/2\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&\text{化 } x_{n-2}x_{n-1}+x_{n-1}x_n \text{ 为平方差}\\ &y_{n-2}^2-y_{n-1}^2,\end{aligned}$$

$y_n=x_n$.

即 $$\begin{cases}y_i=(x_i+x_{i+1}+x_{i+2})/2,\\ y_{i+1}=(x_i-x_{i+1}+x_{i+2})/2 \quad (i=1,3,5,\cdots,n-2)\\ y_n=x_n,\end{cases}$$

化 f 为标准形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+y_5^2-\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2.$$

当 n 为偶数时，f 含奇数个项，对于前面 $n-2$ 个（偶数个）项可由 n 为奇数的前述方法化为新变量的平方差．此外利用 $y_{n-1}=(x_{n-1}+x_n)/2$，$y_n=(x_{n-1}-x_n)/2$ 可将最后一项 $x_{n-1}x_n$ 化为平方差 $y_{n-1}^2-y_n^2$，故当 n 为偶数时可直接作出满秩线性变换：

$$\begin{cases}y_i=(x_i+x_{i+1}+x_{i+2})/2,\\ y_{i+1}=(x_i-x_{i+1}+x_{i+2})/2 \quad (i=1,3,5,\cdots,n-3)\\ y_{n-1}=(x_{n-1}+x_n)/2,\\ y_n=(x_{n-1}-x_n)/2,\end{cases}$$

将 f 化为标准形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2.$$

例 5 用满秩线性变换化下列二次型为标准形：

$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5$.

解 二次型 f 属于类型 Ⅱ，且 n 为奇数，可直接作出下述满秩线性变换

$$\begin{cases} y_1=(x_1+x_2+x_3)/2, \\ y_2=(x_1-x_2+x_3)/2, \\ y_3=(x_3+x_4+x_5)/2, \\ y_4=(x_3-x_4+x_5)/2, \\ y_5=x_5. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1=y_1+y_2-y_3-y_4+y_5, \\ x_2=y_1-y_2, \\ x_3=y_3+y_4-y_5, \\ x_4=y_3-y_4, \\ x_4=y_5. \end{cases}$$

将 f 化为标准形

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2.$$

（Ⅰ）用正交变换化二次型为标准形

对于实二次型还可用正交变换化二次型为标准形．所谓正交变换就是其变换矩阵为正交矩阵的满秩线性变换．用正交变换 $X=QY$ 与用满秩线性变换 $X=PY$ 化二次型 f 为标准型，所得结果是完全不同的．

如用正交变换 $X=QY$ 化 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，其平方项系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 除排列次序外是唯一确定的，它们都是二次型 f 的矩阵 A 的特征值，这是因为正交变换又是相似变换，相似矩阵有相同的特征值．

如用满秩线性变换 $X=PY$ 化 f 为 $f=g_1y_1^2+g_2y_2^2+\cdots+g_ny_n^2$，其平方项系数不唯一，随 P 而变化，且可以不是 A 的特征值，因为合同矩阵不一定有相同的特征值．

向量 Y 经正交变换 $X=QY$ 变成向量 X，它们的长度保持不变．这是因为

$$\|X\|=\sqrt{X^{\mathrm{T}}X}=\sqrt{Y^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QY}=\sqrt{Y^{\mathrm{T}}Y}=\|Y\|.$$

因而用正交变换化二次型为标准型具有保持几何形状不变的优点，这是正交变换应用广泛的重要原因．

如何求出上述正交变换 $X=QY$ 呢？关键在于求出正交变换矩阵 Q，为此需求 A 的两两正交的单位特征向量，以它们为列向量，即得所求的 Q.

如果实对称矩阵 A 的特征值互异，则其特征向量必两两正

交，因而只须将它们单位化即可.

如果 A 的特征值中有重根，需将属于该重根的线性无关的特征向量(其个数等于该重根的重数)先正交化，后单位化，因而必须熟记正交化的方法.

例 6[5.9(2)] 试求一个正交的相似变换矩阵，将下列对称阵化为对角阵：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

解 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2-c_3}(1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 2 & 9-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-11\lambda+10)=-(\lambda-1)^2(\lambda-10).$$

由 $|A-\lambda E|=0$ 得到 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=10$.

解 $(A-\lambda_3E)X=0$. 因 $A-10E\to\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 得基础解系 $\alpha_1=[1,2,-2]^T$，单位化得 $\beta_1=[1/3,2/3,-2/3]^T$.

解 $(A-\lambda_1E)X=0$. 因 $A-E\to\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，得同解方程组

$$x_1+2x_2-2x_3=0 \quad 即 \quad x_1=2x_3-2x_2.$$

因 $\alpha_1=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$，为求与 α_1 正交的解向量只须找出满足上方程组的两个解向量即可．为此令 $x_3=2,x_2=1$，则 $x_1=2$ 得 $\alpha_2=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$．再令 $x_2=2,x_3=1$ 得 $x_1=-2,\alpha_3=[-2,2,1]^{\mathrm{T}}$．

易验证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交．将其单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\-2\end{bmatrix},\beta_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix},\beta_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

令 $Q=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，则 Q 即为所求．易验证有

$$Q^{-1}AQ=\Lambda,\text{其中 }\Lambda=\mathrm{diag}(10,1,1).$$

例 7[1990 年 1,2]　求一个正交变换化下列二次型为标准形：

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3.$$

解　上二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix},\text{则}|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&2&-2\\2&\lambda-4&4\\-2&4&\lambda-4\end{vmatrix}.$$

$$|\lambda E-A|\xlongequal{c_3+c_2}\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-4&\lambda\\-2&4&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\2&\lambda-4&1\\-2&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-r_3}\lambda\begin{vmatrix}\lambda-1&2&0\\4&\lambda-8&0\\-2&4&1\end{vmatrix}=\lambda[(\lambda-1)(\lambda-8)-8]$$

$$=\lambda^2(\lambda-9).$$

由 $|\lambda E-A|=0$ 得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$.

解 $(\lambda_1E-A)\boldsymbol{X}=\mathbf{0}$，求其基础解系．因

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\2&-4&4\\-2&4&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

其基础解系为 $\alpha_1=[2,1,0]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[-2,0,1]^{\mathrm{T}}$．将 α_1,α_2 正交化．

为此令 $\beta_1=\alpha_1$，则

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=[-2/5,4/5,1]^{\mathrm{T}},$$

因 $\|\beta_2\|=3/\sqrt{5}$，$\|\beta_1\|=\sqrt{5}$，将 β_1,β_2 单位化得到

$$\eta_1=\beta_1/\|\beta_1\|=(1/\sqrt{5})[2,1,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_2=(\sqrt{5}/3)[-2/5,4/5,1]^{\mathrm{T}}.$$

解 $(\lambda_3E-A)X=\mathbf{0}$，求其基础解系．因

$$\lambda_3E-A=\begin{bmatrix}8&2&-2\\2&5&4\\-2&4&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

故其基础解为 $\beta_2=[1/2,-1,1]^{\mathrm{T}}$，因 $\|\beta_2\|=3/2$，单位化得

$$\eta_3=\beta_3/\|\beta_3\|=(2/3)[1/2,-1,1]^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则 Q 为正交矩阵，且在正交变换

$$X=QY\ 即\ \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/\sqrt{5}&-2/(3\sqrt{5})&1/3\\1/\sqrt{5}&4/(3\sqrt{5})&-2/3\\0&\sqrt{5}/3&2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

之下，f 化为标准型：$f=9y_3^2$.

注意 用正交矩阵化实对称矩阵为对角矩阵与用正交变换化实二次型为标准形是同一问题的两种不同提法，因而解法相同．

另外，属于同一特征值的线性无关的特征向量如不正交，应像上例那样，将其正交化．也可像例 5 那样，利用正交性求出属于同一特征值的相互正交的特征向量；这时就只须将其单位化．

例 8 设

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

求正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ$ 为对角阵，并写出这个对角阵．

解 矩阵 A 为分块对角阵．令

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & O\\ O & A_2\end{pmatrix},\text{其中 } A_1=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

先分别求出化 A_1,A_2 为对角阵的正交矩阵 Q_1,Q_2.

易求得 $|\lambda E-A_1|=(\lambda-1)(\lambda-3)$，特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$.

解 $(\lambda_1E-A)X=0$ 得其基础解系 $\alpha_1=[1,-1]^T$，单位化得 $\beta_1=[1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]^T$.

解 $(\lambda_2E-A)X=0$ 得其基础解系 $\alpha_2=[1,1]^T$，单位化得 $\beta_2=[1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^T$. 故所求的正交矩阵 $Q_1=[\beta_1,\beta_2]$.

下面再求 Q_2. 由 $|\lambda E-A_2|=\lambda^2-1$ 得其特征值为 $\lambda_3=-1,\lambda_4=1$.

解 $(\lambda_3E-A)X=0$，得其基础解系 $\alpha_3=[1,-1]^T=\alpha_1$，单位化得 $\beta_3=\beta_1$.

解 $(\lambda_4E-A)X=0$，得其基础解系 $\alpha_4=[1,1]^T=\alpha_2$，单位化得 $\beta_4=\beta_2$. 于是所求的正交阵 $Q_2=[\beta_2,\beta_4]=[\beta_1,\beta_2]$.

令 $Q=\begin{pmatrix}Q_1 & O\\ O & Q_2\end{pmatrix}$，则 Q 为所求的正交阵．因易验证有 $Q^TAQ=\mathrm{diag}(1,3,-1,1)$.

习　　题 6.1

1. 用合同变换化下列二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+6x_2x_3+2x_3x_1$$

为标准形，求所用的满秩线性变换，并用矩阵检验．

2. 直接作满秩线性变换化下列二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2n-1}x_{2n}$$

为标准形，求所用的满秩线性变换，并用矩阵检验．

3. 已知 $A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ 0 & 6 & 0\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求一正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ$ 为对角形．

4.[1995 年 4] 已知二次型 $f=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

(1)写出二次型 f 的矩阵表示式；

(2)用正交变换把二次型 f 化为标准型，并写出相应的正交矩阵．

§6.2 正定矩阵的证法

证法一 根据正定二次型定义证之．

当所证矩阵含互为转置的两因子矩阵时，常作非退化线性变换，由正定二次型的定义证其为正定矩阵．

例 1 设 A,B 为 n 阶正定矩阵，证明 BAB 也为正定矩阵．

证 B 正定，故为实对称矩阵，从而 $BAB=B^TAB$，于是 $BAB=B^TAB$ 为对称阵，又 $|B|\neq0$，作非退化的线性变换 $\boldsymbol{Y}=B\boldsymbol{X}$，则由 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有 $\boldsymbol{Y}\neq\boldsymbol{0}$. 于是由 A 正定，得到

$$\boldsymbol{X}^TB^TAB\boldsymbol{X}=(B\boldsymbol{X})^T\boldsymbol{A}(B\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^TA\boldsymbol{Y}>0.$$

故实二次型 X^TB^TABX 正定，从而 BAB 为正定矩阵．

例 2[5.15] 设 U 为可逆实矩阵，$A=U^TU$，证明 $f=\boldsymbol{X}^TA\boldsymbol{X}$ 为正定二次型．

证 因 U 可逆，故 $U\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，因而当 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{X}$ 不是 $U\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，即 $U\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$. 又因 U 为实矩阵，故对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$ 时，有

$$f=\boldsymbol{X}^TA\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^TU^TU\boldsymbol{X}=(U\boldsymbol{X})^T(U\boldsymbol{X})>0.$$

由定义知，f 为正定二次型．证毕

证多个矩阵之和为正定矩阵，常用正定二次型定义证之．

例 3 若 A,B 是 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 也是正定矩阵．

证 (1)因 $A^T=A,B^T=B$，故 $(A+B)^T=A^T+B^T=A+B$，即 $A+B$ 是实对称矩阵．

(2)因 A,B 正定，故对任一实 n 维列向量 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，均有 $\boldsymbol{X}^TA\boldsymbol{X}>0$，$\boldsymbol{X}^TB\boldsymbol{X}>0$，从而

$$\boldsymbol{X}^T(A+B)X=\boldsymbol{X}^TA\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}^TB\boldsymbol{X}>0,$$

即 $A+B$ 为正定矩阵．证毕．

注意 上例说明两个正定矩阵之和必是正定矩阵，其积是否也是正定矩阵呢？因这个积不一定对称（习题 2.10 第 3 题），事实上如果这两个正定矩阵不能交换，就不对称了，故两个正定矩阵的积不一定是正定矩阵．另外，$A-B$ 虽然是对称矩阵，但对任一 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，不能保证总有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(A-B)\boldsymbol{X}>0$，因而也不一定正定．

例 4 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，且秩 $A=n$，证明 $A^{\mathrm{T}}A$ 正定．

证明一 (1)因 $(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A$，故 $A^{\mathrm{T}}A$ 为实对称矩阵；

(2)下证对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，恒有 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}>0$.

令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，其中 α_i 为 A 的列向量，则

$$AX=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n.$$

因秩 $A=n$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关．根据线性无关的定义，对任一组不全为 0 的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，即任一 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有 $A\boldsymbol{X}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n\neq\boldsymbol{0}$，从而

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{X})>0$$

即 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}$ 为正定二次型，$A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵．

证明二 因秩 $A=n$，A 为 $m\times n$ 矩阵，故 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，于是对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{X}$ 不是 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的解，从而 $A\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，又 A 为实矩阵，故 $(A\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{X})>0$，所以对任意 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{0}$，有

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}=(A\boldsymbol{X})^{\mathrm{T}}(A\boldsymbol{X})>0.$$

由定义知，$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{X}$ 为正定二次型，$A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵．

例 5[1999 年 1] 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^{T} 为 B 的转置矩阵，试证：$B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

证 必要性．设 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵，则对任意实 n 维列向量 $X\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X>0$，即 $(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0$. 于是必有 $BX\neq$

$\mathbf{0}$. 因而 $BX=\mathbf{0}$ 只有零解．因 B 为 $m\times n$ 实矩阵，X 为 $n\times 1$ 实列向量，故秩 $B=r(B)=n$.

充分性．因 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}AB$，故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵．下证对任意实 n 维列向量 $X\neq\mathbf{0}$，有

$$X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X=(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0.$$

因秩 $B=r(B)=n$，$BX=\mathbf{0}$ 只有零解．于是当 $X\neq\mathbf{0}$ 时，必有 $BX\neq\mathbf{0}$. 由题设知 A 为正定阵，故对 $BX\neq\mathbf{0}$，有 $(BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0$，即当 $X\neq\mathbf{0}$ 时，有 $X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X>0$，所以 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵．

证法二　证实对称矩阵的各阶顺序主子式大于零．

首先应根据二次型的结构特征，写出二次型的矩阵，然后证明其各阶顺序主子式大于零．对于元素为具体数字的实对称矩阵常用此法证其正定．

例 6　试证二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

为正定二次型．

证　f 的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&2\end{bmatrix}$$

为实对称矩阵，又因 A 的 k 阶顺序主子式

$$D_k=\begin{vmatrix}2&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&2\end{vmatrix}_{k\times k}=k+1>0\quad(k=1,2,\cdots,n),$$

故 A 为正定矩阵，从而 f 正定．证毕．

特别，对于系数含参数的二次型 f，需求参数取何值时，f 为正定的命题，或已知 f 正定，求参数取值范围的命题，常用此法建立参数不等式组，求出参数值（或范围）．

例 7[1991 年 4] 考虑二次型

$$f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

问 λ 取何值时，f 为正定二次型．

解 二次型 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda&4&2\\ -1&2&4\end{pmatrix},$$

其各阶顺序主子式分别为

$$D_1=1,D_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\ \lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2,$$

$$D_3\xlongequal{r_2+2r_1}\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\ \lambda+2&2(\lambda+2)&0\\ -1&2&4\end{vmatrix}=(\lambda+2)\begin{vmatrix}1&\lambda&-1\\ 1&2&0\\ 3&2+4\lambda&0\end{vmatrix}$$

$$=(-4)(\lambda-1)(\lambda+2).$$

由 $D_2>0,D_3>0$ 分别得到 $-2<\lambda<2,-2<\lambda<1$. 故当 $-2<\lambda<1$ 时，A 的各阶顺序主子式全大于零，从而 f 正定．

例 8[1997 年 3][填空题] 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是__________．

解 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\ 1&1&t/2\\ 0&t/2&1\end{pmatrix}.$$

显然其一阶和二阶顺序主子式均大于零．由

$$D_3=|A|=-\begin{vmatrix}1&1&t/2\\ 2&1&0\\ 0&t/2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&t/2\\ 0&-1&-t\\ 0&t/2&1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{2}>0,$$

得到 $t^2<2$ 即 $|t|^2<2$，故 $|t|<\sqrt{2}$. 所以 $-\sqrt{2}<t<2$.

证法三 证 n 元实二次型的标准形的 n 个系数全为正．

例 9 判断二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$ 是否正定．

解 用配方法将 f 化为平方和：

$$f=6[x_1-(1/3)x_2+(1/3)x_3]^2+(13/3)[x_2+(2/13)x_3]^2+(243/39)x_3^2.$$

作满秩线性变换：

$$y_1=x_1-(1/3)x_2+(1/3)x_3, y_2=x_2+(2/13)x_3, y_3=x_3,$$

则 $$f=6y_1^2+(13/3)y_2^2+(243/39)y_3^2.$$

显然，其标准形的 3 个系数全为正，f 为正定二次型．

证法四 证实对称矩阵的特征值都大于零（见 §6.4 例 9）．

对于易求出（或易证）其特征值大于零的实对称矩阵可用此法证其正定．

例 10 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且满足 $A^3-5A^2+A-5E=O$. 证明 A 正定．

证 设 λ 为 A 的任一特征值，且 $A\alpha=\lambda\alpha$，α 为其对应特征向量．下证 $\lambda>0$. 由所给矩阵等式得到

$$(A^3-5A^2+A-5E)\alpha=(\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-5)\alpha=\mathbf{0}$$

因 $\alpha\neq\mathbf{0}$，故 $\lambda^3-5\lambda^2+\lambda-5=\lambda^2(\lambda-5)+(\lambda-5)=(\lambda-5)(\lambda^2+1)=0$. 从而 $\lambda=5$ 或 $\lambda=\pm\sqrt{-1}=\pm i$. 因 A 为实对称矩阵，故其特征值全部为实数，因而 $\lambda=5>0$，所以 A 为正定矩阵．

例 11 设 A 为正定矩阵，证明：(1) A^m（m 为正整数）为正定阵；(2) $g(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_i\geqslant0$，且至少有一为正，则 $g(A)$ 为正定矩阵．

证 (1) 因 A 为正定矩阵，其特征值 $\lambda_i>0$，而 A^m 的特征值为 $\lambda_i^m(i=1,2,\cdots,n)$，故全为正；又 A 为实对称，显然 A^m 为实对称，故 A^m 为正定阵．

(2) A 为实对称，$g(A)$ 也为实对称．又因 $g(A)$ 的全部特征值 $g(\lambda_1),\cdots,g(\lambda_n)$ 由题设知全为正，故 $g(A)$ 为正定矩阵．

证法五 证实对称矩阵与单位矩阵 E 合同．

已知一矩阵正定，常用此法证明对该矩阵运算后所得的新矩阵也正定．

例 12 设 A 为正定矩阵，则 A^{-1} 也是正定矩阵．

证 因 A 正定，故 $A^{T}=A$，因而

$$(A^{-1})^{T}=(A^{T})^{-1}=A^{-1},$$

即 A^{-1} 为实对称矩阵．

又因 A 正定，故存在可逆阵 P_1，使 $P_1^{T}AP_1=E$，等式两边求逆，得到 $P_1^{-1}A^{-1}(P_1^{T})^{-1}=E$，令 $(P_1^{T})^{-1}=P$，则 P 为可逆矩阵，且使 $P^{T}A^{-1}P=E$，故 A^{-1} 正定．

例 13 如果 C 是可逆矩阵，A 是正定矩阵，证明 CAC^{T} 也是正定矩阵．

证 显然 CAC^{T} 是对称矩阵．因 C^{T} 是可逆矩阵，且

$$B=CAC^{T}=(C^{T})^{T}A(C^{T}),$$

因而 B 与 A 合同．又因 A 是正定矩阵，故 A 与 E 合同．于是由合同的传递性知 B 与 E 合同，从而 $B=CAC^{T}$ 是正定矩阵．证毕

A 为正定的充要条件是存在可逆矩阵 P，使 $P^{T}AP=E$，即

$$A=(P^{T})^{-1}P^{-1}=(P^{-1})^{T}P^{-1}=C^{T}C,$$

其中 $C=P^{-1}$ 为可逆阵．于是得到

证法六 证存在可逆阵 C，使实对称矩阵 $A=C^{T}C$.

例 14 A 为 n 阶正定阵，$k>0$，则 kA 也为正定矩阵．

证 由于 A 为正定阵，A 为实对称，从而 kA 也为实对称．

又 A 为正定阵，故存在可逆阵 P_1，使 $A=P_1^{T}P_1$，两边同乘以 k，因 $k>0$，得到

$$kA=kP_1^{T}P_1=(\sqrt{k}P_1)^{T}(\sqrt{k}P_1)=C^{T}C,$$

其中 $C=\sqrt{k}P_1$ 为可逆矩阵，故 kA 为正定矩阵．

例 15 A 为正定阵，则 A^{*} 也为正定阵．

证明一 A 为正定，由例 12 知 A^{-1} 也正定，故存在实满秩矩阵 B，使 $A^{-1}=B^{T}B$. 又因 A 正定，故 $|A|>0$，从而 $\sqrt{|A|}$ 仍为实数，于是有

$$A^{*}=|A|A^{-1}=|A|B^{T}B=(\sqrt{|A|}B)^{T}(\sqrt{|A|}B).$$

令 $\sqrt{|A|}B=C$,则 $A^*=C^TC$,C 为可逆阵. 下证 A^* 为实对称.

由 A 为正定阵,知 A 可逆且为实对称,于是有

$$\begin{aligned}(A^*)^T&=(|A|A^{-1})^T=|A|(A^{-1})^T\\&=|A|(A^T)^{-1}=|A|A^{-1}=A^*.\end{aligned}$$

故 A^* 为实对称矩阵,因而 A^* 为正定阵.

证明二 A^* 为实对称矩阵,对任意非零向量 $\boldsymbol{X}$,有

$$\boldsymbol{X}^TA^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^T|A|A^{-1}\boldsymbol{X}=|A|\boldsymbol{X}^TA^{-1}\boldsymbol{X},$$

因 A 正定,故 $|A|>0$;又 A^{-1} 也正定,故 $\boldsymbol{X}^TA^*\boldsymbol{X}>0$.

证明三 因 A^{-1} 为正定,故存在可逆阵 P_1,使 $P_1^TA^{-1}P_1=E$,两边乘以 $|A|$,得到

$$P_1^T|A|A^{-1}P_1=P_1^TA^*P_1=|A|E.$$

因 A 正定,$|A|>0$,$\sqrt{|A|}$ 为实数,故

$[(1/\sqrt{|A|})P_1]^TA^*[(1/\sqrt{|A|})P_1]=E.$

令 $P=P_1/(\sqrt{|A|})$,则 P 为可逆阵,故 A^* 与 E 合同.

证明四 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$. 因 A 正定,故 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,且 $|A|>0$,而 A^* 的特征值为 $|A|/\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$(见§5.1 例 18),故 A^* 的所有特征值 $|A|/\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$. 所以 A^* 为正定阵.

例 16[1992 年 4] 设 A,B 分别为 m,n 阶正定矩阵,试判定分块矩阵 $C=\begin{bmatrix}A&O\\O&B\end{bmatrix}$ 是否是正定矩阵.

解法一 因 A,B 分别为 m,n 阶正定矩阵,故存在 m 阶可逆阵 P_1,n 阶可逆阵 P_2,使 $A=P_1^TP_1$,$B=P_2P_2^T$.

为证 C 正定,下找可逆阵 M,使 $C=M^TM$.

事实上,令 $M=\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}$,则有

$$M^TM=\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1^T&O\\O&P_2^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1&O\\O&P_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}P_1 & O \\ O & P_2^{\mathrm{T}}P_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=C.$$

又因 P_1,P_2 可逆，故 M 也可逆．所以 C 为正定阵．

解法二 设 $m+n$ 维行向量 $X^{\mathrm{T}}=[X_1^{\mathrm{T}},X_2^{\mathrm{T}}]$，其中

$$X_1^{\mathrm{T}}=[x_1,x_2,\cdots,x_m],X_2^{\mathrm{T}}=[x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n}].$$

若 $X\neq 0$，则 X_1,X_2 不同时为 0，不妨设 $X_1\neq 0$，因 A 为正定矩阵，必有 $X_1^{\mathrm{T}}AX_1>0$.

又因 B 是正定矩阵，故对任意 n 维向量 X_2，有 $X_2^{\mathrm{T}}BX_2\geqslant 0$，于是由

$$X^{\mathrm{T}}CX=[X_1^{\mathrm{T}},X_2^{\mathrm{T}}]\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=X_1^{\mathrm{T}}AX_1+X_2^{\mathrm{T}}BX_2>0$$

知 C 是正定矩阵．

解法三 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$；$B$ 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，则 C 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 这可由下式看出：

$$|\lambda E_{m+n}-C|=\begin{vmatrix} \lambda E_m-A & O \\ O & \lambda E_n-B \end{vmatrix}=|\lambda E_m-A||\lambda E_n-B|=0.$$

又因 A,B 正定，故 $\lambda_i>0,\mu_j>0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，从而 C 的特征值全部大于零，所以 C 正定．

解法四 设 A 的各阶顺序主子式为 $|A_1|,|A_2|,\cdots,|A_m|=|A|$，而 B 的各阶顺序主子式为 $|B_1|,|B_2|,\cdots,|B_n|=B$. 因 A,B 正定，故 $|A_i|>0(i=1,2,\cdots,m)$，$|B_j|>0(j=1,2,\cdots,n)$. 则 C 的各阶主子式为 $|C_1|=|A_1|>0$，$|C_2|=|A_2|>0,\cdots,|C_m|=|A|>0$，$|C_{m+1}|=|A||B_1|>0$，$|C_{m+2}|=|A||B_2|>0,\cdots,|C_{m+n}|=|A|\cdot|B_n|=|A||B|>0$ 又显然为实对称矩阵，故 C 正定．

注意 上例证明一利用了矩阵分块的技巧．回顾前面证明分块矩阵正交性、相似性及其行列式和逆矩阵的计算都多次用到这种技巧．

习　题　6.2

1. 你能用几种方法证明下列实二次型为正定二次型：

$$f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3.$$

2. λ满足什么条件时，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda x_1^2+x_2^2+5x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 为正定二次型.

3. 设 A 为正定矩阵，则 A^{T} 也为正定矩阵.

4. 设 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 两两互异，$k\leqslant n$，且

$$V=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\x_0&x_1&\cdots&x_n\\x_0^2&x_1^2&\cdots&x_n^2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_0^k&x_1^k&\cdots&x_n^k\end{bmatrix},$$

试证 VV^{T} 为正定矩阵.

5. 已知 A 是反对称矩阵，试证 $E-A^2$ 为正定矩阵，其中 E 为单位阵.

6. 设 A 为 n 阶可逆阵，试证 $X(AA^{\mathrm{T}})X^{\mathrm{T}}$ 为正定二次型，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

7. A 为 n 阶实对称矩阵，E 为 n 阶单位阵，则当 t 充分大时，$A+tE$ 正定.

§6.3　正交矩阵的证法

证法一　证矩阵的每一列(行)向量为单位向量，且证两不同的列(行)向量正交，即证 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$的各列(或行)元素满足正交条件：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}\quad 或\quad \sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n).\qquad(6.3.1)$$

例 1[5.2]　下列矩阵是不是正交阵：

$$(1)A=\begin{bmatrix}1&-1/2&1/3\\-1/2&1&1/2\\1/3&1/2&-1\end{bmatrix};(2)B=\begin{bmatrix}1/9&-8/9&-4/9\\-8/9&1/9&-4/9\\-4/9&-4/9&7/9\end{bmatrix}$$

解 (1)设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 分别为 A 的第 1，2，3 列向量．α_1 与 α_2 不正交，且 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都不是单位向量，故 A 不是正交阵．

(2)**解法一** 设 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，易验证有 B 的列向量是两两正交的单位向量，故 B 为正交阵．

解法二 设 $B=[b_{ij}]_{3\times3}$．下证其各列元素满足正交条件．事实上

$$\begin{aligned}\delta_{11}&=\sum_{k=1}^{3}b_{k1}b_{k1}\\&=(1/9)(1/9)+(-8/9)(-8/9)+(-4/9)(-4/9)=1.\end{aligned}$$

同法可验证 $\delta_{22}=\delta_{33}=1$.

$$\begin{aligned}\text{又}\quad \delta_{12}=\sum_{k=1}^{3}b_{k1}b_{k2}=&(1/9)\times(-8/9)+\\&(-8/9)(1/9)+(-4/9)(-4/9)=0,\end{aligned}$$

同法可验证 $\delta_{13}=\delta_{23}=0$.

因 B 的元素满足正交条件(6.3.1)式，故 B 为正交阵．解毕

例 2 已知两个正交单位向量 $\eta_1=[1/9,-8/9,-4/9]^{\mathrm{T}}$，$\eta_2=[-8/9,1/9,-4/9]^{\mathrm{T}}$．试求列向量 η_3 使得以 η_1,η_2,η_3 为列向量组成的矩阵 Q 是正交矩阵．

解 由题设有 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，且 $\eta_i\eta_j=0(i,j=1,2,3,i\neq j)$，且 $\|\eta_i\|=1(i=1,2,3)$，即 Q 的列向量是两两正交的单位向量，故所求的 η_3 应满足

$$\eta_1\cdot\eta_3=\eta_2\cdot\eta_3=0,\text{且}\ \|\eta_3\|=1.$$

设 $\eta_3=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}}$，由 $\eta_1\cdot\eta_3=\eta_2\cdot\eta_3=0$ 得到

$$\begin{cases}(1/9)x_1-(8/9)x_2-(4/9)x_3=0;\\(-8/9)x_1+(1/9)x_2-(4/9)x_3=0.\end{cases}\text{解得 } x_1=-\frac{4}{7}x_3,x_2=-\frac{4}{7}x_3.$$

将其代入 $\|\eta_3\|^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ 得 $x_3=\pm7/9$.

于是所求列向量为

$$\eta_3=[-4/9,-4/9,7/9]^{\mathrm{T}},\text{或 }\tilde{\eta}_3=[4/9,4/9,-7/9]^{\mathrm{T}}.$$

这时 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$及 $\tilde{Q}=[\eta_1,\eta_2,\tilde{\eta}_3]$均为正交阵，不过 $|Q|=-$

1，而 $|\tilde{Q}|=1$.

注意 已知部分正交向量组， 求另一向量与之正交，常利用正交性，建立齐次线性方程组解之求得．

欲确定参数取何值时，使含参数的矩阵为正交矩阵，其解法是根据正交条件列出参数所满足的方程组，求出参数的取值，确定相应的正交矩阵．含三个参数，一般可确定四个正交矩阵．

例 3 a,b,c 为何值时，下列矩阵 A 为正交矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & c & 0 \end{bmatrix}.$$

解 根据正交矩阵的定义，由第 1 列向量长度等于 1，即由 $(1/\sqrt{2})^2+b^2=1$ 推出 $b=\pm(1/\sqrt{2})$；再由第 1、3 两行行向量长度等于 1，即由 $(1/\sqrt{2})^2+a^2=1$ 与 $b^2+c^2=1$，分别推出 $a=\pm(1/\sqrt{2})$；$c=\pm(1/\sqrt{2})$.

由列（或行）的正交性，可确定 a,b,c 的符号．

由第 1,2 列正交，得到 $(1/\sqrt{2})a=-bc$，故当 $a=1/\sqrt{2}>0$ 时，b,c 异号，因而

$$b=\pm 1/\sqrt{2},c=\mp(1/\sqrt{2}),$$

当 $a=-1/\sqrt{2}<0$ 时，b,c 同号，因而

$$b=\pm 1/\sqrt{2},c=\pm 1/(\sqrt{2}),$$

因此，相应的正交矩阵为下列 4 个：

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

注意 求出 a,b,c 可能取的值后，一定还要根据行(或列)的正交性，确定 a,b,c 的符号搭配，本例有上述四种搭配，其他的搭配不能组成正交矩阵．

上述矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的元素所满足的两正交条件如用矩阵 A 表示就是 $AA^T=E$ 或 $A^TA=E$，因而得到

证法二 证方阵 A 满足 $AA^T=E$ 或 $A^TA=E$.

此法常用于理论推导．

例 4 下列矩阵 A 是否为正交矩阵

$$A=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

解 设 B 为等号右端之矩阵，则 $A=(\sqrt{2}/2)B$，且

$$B^TB=2E, A^T=(\sqrt{2}/2)B^T,$$

故 $A^TA=(\sqrt{2}/2)B^T(\sqrt{2}/2)B=(2/4)\cdot 2E=E.$

例 5[5.3] A,B 为正交矩阵时，则 AB 也是正交矩阵．

证 A,B 为正交矩阵，则 $AA^T=E, BB^T=E$，故

$$(AB)(AB)^T=ABB^TA^T=AA^T=E.$$

例 6 若 A 为正交矩阵，证明 A^{-1} 也是正交矩阵．

证明一 A 为正交阵，则 $A^TA=E, A^{-1}=A^T$，因而

$$(A^{-1})(A^{-1})^T=A^T(A^T)^T=A^TA=E.$$

证明二 对 $AA^T=E$ 两边求逆，得 $(A^T)^{-1}A^{-1}=(A^{-1})^TA^{-1}=E$，故 A^{-1} 为正交矩阵．

例 7 若 A 为正交矩阵，则 A^* 也是正交矩阵．

证 A 为正交矩阵，则 $A^TA=AA^T=E, |A|^2=1, A^{-1}=A^T$，又 $A^*=|A|A^{-1}$，故

$$\begin{aligned}A^*(A^*)^T&=|A|A^{-1}(|A|A^{-1})^T\\&=|A|^2A^{-1}(A^{-1})^T=A^TA=E.\end{aligned}$$

例 8 设 α 为非零的 n 维列向量，E 为 n 阶单位阵，证明矩阵 $H=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T$ 为正交矩阵.

证 下证 $H^TH=E$. 由转置矩阵的性质先证 $H^T=H$:

$$H^T=[E-(2/\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T]^T=E-(2/\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T=H,$$

于是
$$\begin{aligned}H^TH&=[E-(2/\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T]^T[E-(2/\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T]\\&=E-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T-[2/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T+\\&\quad[4/(\alpha^T\alpha)^2]\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T,\end{aligned}$$

因 $\alpha^T\alpha$ 为一非零数，故 $\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=(\alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T$,

$$H^TH=E-[4/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T+[4/(\alpha^T\alpha)]\alpha\alpha^T=E.$$

例 9 如果 A 满 $A^2+6A+8E=O$，且 $A^T=A$，则 $A+3E$ 为正交矩阵.

证 只须证 $(A+3E)^T(A+3E)=E$. 事实上,

$$\begin{aligned}(A+3E)^T(A+3E)&=(A^T+3E)(A+3E)\\&=(A+3E)(A+3E)\\&=A^2+6A+8E+E=E.\end{aligned}$$

例 10 设 $|A|=1$，证明 A 是正交阵的充要条件是 $A=(A^T)^*$.

证 因 $|A|=1$，故 $|A^T|=1$，所以 $(A^T)(A^T)^*=(A^T)^*A^T=E$. 因而 $(A^T)^{-1}=(A^T)^*$. 于是有

$$\begin{aligned}A\text{ 是正交阵}&\leftrightarrow AA^T=A^TA=E\\&\leftrightarrow A=(A^T)^{-1}\leftrightarrow A=(A^T)^*.\end{aligned}$$

例 11 设分块矩阵 $A=\begin{bmatrix}P & R\\ O & Q\end{bmatrix}$ 是正交矩阵，其中 P,Q 分别是 m,n 阶方阵. 证明 P,Q 是正交矩阵，且 $R=O$.

证 由 $A^TA=\begin{bmatrix}P^T & O\\ R^T & Q^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P & R\\ O & Q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P^TP & P^TR\\ R^TP & R^TR+Q^TQ\end{bmatrix}=E$

得到 $\quad P^TP=E_m, P^TR=O, R^TP=O, R^TR+Q^TQ=E_n.$

因而 P 是正交矩阵，于是 P 可逆. 将 P^{-1} 右乘 $R^TP=O$ 的两端得 $R^T=O$，即 $R=O$. 将 $R=O$ 代入上面最后一式得 $Q^TQ=E$，故 Q 为

正交矩阵.

证法三 证矩阵的转置矩阵等于其逆矩阵,即证

$$A^{T}=A^{-1}.$$

例 12 若 A,B 为同阶正交阵,试证 $A^{-1}B$ 也是正交阵.

证 因 A,B 为正交阵,故 $B^{T}=B^{-1},A^{T}=A^{-1}$,因而

$$\begin{aligned}(A^{-1}B)^{T}&=B^{T}(A^{-1})^{T}=B^{T}(A^{T})^{-1}\\&=B^{-1}(A^{-1})^{-1}=(A^{-1}B)^{-1},\end{aligned}$$

故 $A^{-1}B$ 也为正交阵.

例 13 若矩阵 A,B 都是 n 阶正交阵,证明分块$\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}$也是正交矩阵.

证 因 A,B 为正交阵,故 $A^{T}=A^{-1},B^{T}=B^{-1}$,所以

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}A^{T} & O\\ O & B^{T}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^{-1}.$$

习　　题 6.3

1. 设 A 是正交矩阵,证明 A^{T} 也是正交矩阵.
2. 问 a,b,c 取何值时,下列矩阵为正交矩阵:

$(1)A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ a & 0 & c\\ b & 0 & 1/2\end{bmatrix}$;$(2)B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & 2c\end{bmatrix}$.

§6.4 正交相似变换下的标准形在证题中的简单应用

A 为 n 阶实对称矩阵,用正交矩阵 Q 可把 A 化为对角矩阵,

即 $$Q^{T}AQ=Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\tag{6.4.1}$$

或 $$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1},\tag{6.4.2}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值.(6.4.1)式称为 A 在正交相似变

换下的标准形．它在证题中有广泛应用．

应用一 利用(6.4.2)式对实对称矩阵 A 作和分解与乘积分解．

作和分解时，常将 Q 作列分块，Q^{-1}作行分块；有时也将对角阵分解成对角矩阵之和．

作乘积分解时，常将对角阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 分解成两个或多个对角阵的乘积，且在其间插入其积等于单位矩阵的乘积矩阵 $Q^{-1}Q$.

例 1 设 A 是 n 阶实对称矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的 n 个单位正交特征向量，对应的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}.$$

证 因 A 是实对称矩阵，故存在正交阵 Q 使 $A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}$成立．设 $Q=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，其中 α_i 为 Q 的第 i 个列向量，则 $Q^{-1}=Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$，于是有

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \alpha_2^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

将上式右端直接乘开，得

$$A=\lambda_1\alpha_1\alpha_1^{\mathrm{T}}+\lambda_2\alpha_2\alpha_2^{\mathrm{T}}+\cdots+\lambda_n\alpha_n\alpha_n^{\mathrm{T}}.$$

因 Q 的列向量是 A 的特征向量，且 Q 为正交矩阵，故 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$为 A 的单位正交特征向量．

例 2[5.16] 设 A 为正定矩阵，证明存在可逆矩阵 U，使 $A=U^{\mathrm{T}}U$.

证明一 A 为实对称，由(6.4.2)式得到

$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}\quad(\lambda_i>0)(i=1,2,\cdots,n)$

$$=Q\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)\cdot$$

$$\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)Q^{-1}(Q \text{ 为正交阵}).$$

令 $U=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)Q^{-1}$，则

$$U^{\mathrm{T}}=(Q^{-1})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)$$

$$=(Q^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right)$$

$$=Q\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}\right),$$

故

$$A=U^{\mathrm{T}}U.$$

证明二 因 A 为正定阵，故存在可逆阵 P，使 $P^{\mathrm{T}}AP=E$，即

$$A=(P^{\mathrm{T}})^{-1}EP^{-1}=(P^{-1})^{\mathrm{T}}P^{-1}=U^{\mathrm{T}}U\,(U=P^{-1}).$$

例 3 已知 $A=\begin{bmatrix}13 & 14 & 4\\ 14 & 24 & 18\\ 4 & 18 & 29\end{bmatrix}$，求满足关系式 $X^2=A$ 的实对称矩阵 X.

解 A 为实对称矩阵，用正交矩阵将其化为对角矩阵．由

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-16)(\lambda-49),$$

知 A 的 3 个特征值互异，且为 $\lambda_1=1,\lambda_2=16,\lambda_3=49$. 求出 A 的分别属于特征值 1,16,49 的正交特征向量为

$$\alpha_1=[2,-2,1]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[2,1,-2]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,2,2]^{\mathrm{T}}.$$

单位化，得到

$$\eta_1=(1/3)[2,-2,1]^{\mathrm{T}},\eta_2=(1/3)[2,1,-2]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_3=(1/3)[1,2,2]^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，则 Q 为正交矩阵，且有

$$A=Q\mathrm{diag}(1,16,49)Q^{-1}$$

$$=[Q\mathrm{diag}(1,4,7)Q^{-1}][Q\mathrm{diag}(1,4,7)Q^{-1}].$$

待求 X，使 $A=X^2=X\cdot X$，比较上式可知，

$$X=Q\mathrm{diag}(1,4,7)Q^{-1}=Q\mathrm{diag}(1,4,7)Q^{\mathrm{T}},$$

即为所求的一个实对称矩阵．

应用二 根据实对称矩阵所满足的关系式，利用(6.4.1)式可求出实对称矩阵的相似标准形.

例 4 设 n 阶实对称矩阵 A 是幂等矩阵(即 $A^2=A$)，且秩 $A=r$，试求(1)矩阵 A 的相似标准形；(2)行列式 $|5E-A|$.

解 (1)由 $A^2=A$ 得到 A 的特征值为 1 和 0.

又因 A 为实对称矩阵，由(6.4.1)式得到

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0).$$

特征值 1 有多少个？因秩$(Q^{-1}AQ)=$秩 $A=r$，故 A 的特征值为 1 的有 r 个，因而 A 的相似标准形为

$$Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,0,\cdots,0) \quad (\text{共 } r \text{ 个 } 1).$$

(2)由(1)知 A 有 r 个特征值 1，且有 $n-r$ 个零特征值，故其特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^{n-r}(\lambda-1)^r.$$

令 $\lambda=5$ 代入上式便得

$$|5E-A|=5^{n-r}(5-1)^r=4^r\cdot 5^{n-r}.$$

应用三 证明与实对称矩阵有关的行列式不等式.

例 5 设 n 阶实对称矩阵 $A\neq O$，且其特征值全为非负数，E 为 n 阶单位阵，则 $A+E$ 的行列式 $|A+E|>1$.

证明一 设 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 $\lambda_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$. 因 $A\neq O$，故至少有一个特征值 $\lambda_j>0$.

事实上，如所有特征值 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}=Q\cdot O\cdot Q^{-1}=O$$

这与 $A\neq O$ 矛盾.

因 A 为实对称矩阵，由(6.4.2)式有

$$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}.$$

又 $$E=Q\mathrm{diag}(1,\cdots,1,\cdots,1)Q^{-1}.$$

故
$$\begin{aligned}|A+E|&=|Q\mathrm{diag}(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)Q^{-1}|\\&=|Q||Q|^{-1}|\mathrm{diag}(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1)|\\&=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_j+1)\cdots(\lambda_{n-1}+1)(\lambda_n+1)>1.\end{aligned}$$

证明二 因 $A+E$ 的特征值为 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_j+1,\cdots,\lambda_n+1$. 且至少有一特征值 $\lambda_j+1>1$(由证明一可知),而其余的特征值有 $\lambda_i+1\geqslant 1(i=1,2,\cdots,n,i\neq j)$. 从而由(5.2.7)式得到

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_j+1)\cdots(\lambda_n+1)>1.$$

应用四 以(6.4.1)或(6.4.2)式中的对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_j,\cdots,\lambda_n)$ 为桥梁证明实对称矩阵的有关性质.

例 6 设 A 为实对称矩阵,若 $A^2=O$,则 $A=O$.

证 A 为实对称矩阵,由(6.4.2)式,得到

$$A^2=A\cdot A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{\mathrm{T}}\cdot Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)Q^{\mathrm{T}}.$$

因 Q 为正交矩阵,$Q^{\mathrm{T}}Q=E$,故

$$A^2=Q\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)Q^{\mathrm{T}}.$$

因 $A^2=O$,Q 可逆,Q^{T} 也可逆,故

$$\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)=Q^{-1}A^2(Q^{\mathrm{T}})^{-1}=O,$$

因而 $\lambda_i^2=0$,故 $\lambda_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,由(6.4.2)式得 $A=O$.

例 7 试证对称的正交矩阵 A 的特征值必为 1 或 -1.

证 A 为正交阵,又为对称阵,故

$$A^2=A\cdot A=A\cdot A^{\mathrm{T}}=E.$$

因 A 为实对称矩阵,由(6.4.2)式得到

$$A^2=Q\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)Q^{-1}=E,$$

于是 $\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2)=Q^{-1}Q=E$,即 $\lambda_i^2=1$,故 $\lambda_i=\pm 1$.

例 8 对任何实对称矩阵 A,必有实数 $\beta>0$,使 $E+\beta A$ 为正定矩阵.

证 (1)A 为对称阵,故 $E+\beta A$ 也为对称阵;

(2)先求 β,使 $\beta^{-1}E+A$ 的所有特征值大于零,再证 $E+\beta A$ 正定. 设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,因 A 为实对称矩阵,由(6.4.1)式得到

$$Q^{-1}(\beta^{-1}E+A)Q=\mathrm{diag}(\beta^{-1}+\lambda_1,\cdots,\beta^{-1}+\lambda_n)(\beta>0).$$

为使 $\beta^{-1}+\lambda_i>0$，取 $\beta^{-1}>\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{|\lambda_j|\}$. 于是 $\beta^{-1}E+A$ 的特征值全大于零，从而 $\beta^{-1}E+A$ 为正定矩阵．又因 $\beta>0$，故

$\beta(\beta^{-1}E+A)=E+\beta A$ 为正定矩阵(见§6.2 例 14).

例 9 证明实对称矩阵正定的充要条件是其特征值全为正数．

证 设 A 为 n 阶实对称矩阵，则存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots n)$ 为 A 的特征值．

作正交变换 $\boldsymbol{X}=Q\boldsymbol{Y}$，其中

$$\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=[y_1,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}},$$

则
$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Y},$$

故 A 正定 $\leftrightarrow\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}>0\leftrightarrow\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Y}>0$

$$\leftrightarrow\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0\leftrightarrow\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n).$$

例 10[5.13] 证明实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}$ 在 $\|\boldsymbol{X}\|=1$ 时的最大值恰为方阵 A 的最大特征值．

证 由于 f 为实二次型，一定存在正交变换 $\boldsymbol{X}=Q\boldsymbol{Y}$，使二次型 f 化为平方和，其中 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)\boldsymbol{Y}\\&=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{Y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,\end{aligned}$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值，且为实数，记其最大值为 λ_k.

又由 $\|X\|=\sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}=1$ 即 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 得到

$$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=y_1^2+\cdots+y_n^2=1,$$

于是

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant\lambda_k(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_k.$$

这就证明了在条件 $\|X\|=1$ 之下 f 的最大值不超过矩阵 A 的最大特征值 λ_k. 下证 λ_k 是 f 在单位球面 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$ 上的最大值．即在单位球面上可找一点 $\boldsymbol{X}_0=[x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}]^{\mathrm{T}}$，使 $f(\boldsymbol{X}_0)=\lambda_k$. 为此先在单位球面 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}=1$ 上取一点

$$\begin{aligned}Y_0&=[y_1^{(0)},\cdots,y_{k-1}^{(0)},y_k^{(0)},y_{k+1}^{(0)},\cdots,y_n^{(0)}]\\&=[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]\text{(第 }k\text{ 个分量为 1,其余分量全为 0)}\end{aligned}$$

则 $$f(Y_0)=\lambda_1 0+\cdots+1\cdot\lambda_k+\cdots+0\cdot\lambda_n=\lambda_k.$$

再通过正交变换可找到所要求的点 X_0. 事实上，只须令 $X_0=QY_0$ 即可，这时有

$$X_0^{\mathrm{T}}X_0=(QY_0)^{\mathrm{T}}QY_0=Y_0^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}Q)Y_0=Y_0^{\mathrm{T}}Y_0=1,$$

且 $$\begin{aligned}f(X_0)&=X_0^{\mathrm{T}}AX_0=(QY_0)^{\mathrm{T}}AQY_0=Y_0^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}AQ)Y_0\\&=Y_0^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_k,\cdots,\lambda_n)Y_0=\lambda_k.\end{aligned}$$

这就证明了 λ_k 是 f 在 $\|X\|=1$ 时的最大值. 例得证.

习　　题 6.4

1. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 A 的 n 个单位正交特征向量，对应的特征值分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，证明存在 n 个实矩阵 $P_i=\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,n)$使

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_nP_n，且秩 P_i=1.$$

2. 设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2=E$，证明存在正交矩阵 Q，使 $Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\ 0 & -E_{n-r}\end{bmatrix}$($r$ 为 A 的特征值 1 的个数，秩$(E-A)=n-r$.)

3. n 阶实对称矩阵 A 是幂等矩阵($A^2=A$)且秩 $A=m$，求 $|8E+A|$.

4. 设矩阵 A 为 n 阶正定矩阵，则存在可逆的实对称阵 B，使 $A=B^2$.

5. 实对称矩阵 A 的特征值的绝对值均为 1，则 A 为正交矩阵.

6. 试证正定矩阵 A 为正交矩阵的充要条件是 A 为单位矩阵.

7. [1991 年 1,2]　设 A 为 n 阶正定阵，E 为 n 阶单位阵，证明 $A+E$ 的行列式 $|A+E|>1$.

8. 证明秩为 r 的实对称矩阵可表成 r 个秩为 1 的对称矩阵之和.

9. 证明：二次型 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 在 $\|X\|=1$ 时最小值恰为方阵 A 的最小特征值.

§6.5　矩阵及其相似标准形中参数的求法

这里的相似标准形也包含正交相似标准形，因此下分两种情

况讨论．

（一）矩阵及其相似标准形中参数的求法

因相似变换前后的两矩阵，其特征多项式相等，故其特征值相同．此外，其行列式也相等．利用这些性质就可确定参数．

值得注意的是变换后的矩阵即相似标准形就是对角矩阵，其主对角线上的元素都是矩阵的特征值．求变换前的矩阵即二次型矩阵的特征值一般由 $|\lambda E-A|=0$ 求出．求时务必留心§4.4 例4下面的注意事项．

参数确定后，就可按通常的方法求出将矩阵化为对角矩阵的相似变换（矩阵）．

例 1[5.5] 设 $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$ 与 $\Lambda=\begin{bmatrix}5 & & \\ & y & \\ & & -4\end{bmatrix}$ 相似，求 x,y.

解 因 A,B 相似，其特征值相同．由

$$
\begin{aligned}
|A-\lambda E| &= \begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & -4\\ -2 & x-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} \\
&\xlongequal{r_1-r_3} \begin{vmatrix}5-\lambda & 0 & 5-\lambda\\ -2 & x-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} \\
&=(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & x-\lambda & -2\\ -4 & -2 & 1-\lambda\end{vmatrix} \\
&\xlongequal{c_3+c_1}(5-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & x-\lambda & -4\\ -4 & -2 & -3-\lambda\end{vmatrix} \\
&=(5-\lambda)[\lambda^2-(x-3)\lambda-3x-8].
\end{aligned}
$$

与 $|\Lambda-\lambda E|=(5-\lambda)(y-\lambda)(-4-\lambda)$ 知 Λ 有特征值 -4，A 也应有此特征值．将 $\lambda=-4$ 代入 $|A-\lambda E|=(5-\lambda)[\lambda^2-(x-3)\lambda-3x-$

$8]=0$ 中得 $x=4$,故 $|A-\lambda E|=(5-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-5)$.

矩阵 A 有 2 重特征值 $\lambda=5$,故 A 也有 2 重特征值 $\lambda=5$,所以 $y=5$.

例 2[1997 年 4]　设矩阵 A 与 B 相似,且

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}.$$

(1)求 a,b 的值;(2)求可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=B$.

解　(1)首先将 A 的特征多项式分解成 λ 的因式的乘积．为此将 $|\lambda E-A|$ 中某个不含 λ 的元素消成零,使其所在的列或行产生 λ 的一次因式:

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&1\\-2&\lambda-4&2\\3&3&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+(-1)c_2}\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\-(\lambda-2)&\lambda-4&2\\0&3&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&\lambda-4&2\\0&3&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&\lambda-3&1\\0&3&\lambda-a\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)[\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)].$$

由 $A\sim B$ 可知,A 与 B 有相同的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=b$. 由于 2 是 A 的二重特征值,故 2 是方程

$$\lambda^2-(a+3)\lambda+3(a-1)=0$$

的根,把 $\lambda=2$ 代入上式即得 $a=5$. 因而有

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+12)=(\lambda-2)^2(\lambda-6).$$

于是 $b=\lambda_3=6$.

(2)解线性方程组$(2E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,$(6E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$分别得到属于$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$的特征向量:

$$\alpha_1=[-1,1,0]^T,\alpha_2=[1,0,1]^T,\alpha_3=[1,-2,3]^T.$$

令 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$,易验证有 $P^{-1}AP=B$. 于是 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$即为所求.

例 3[1996 年 1] 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(1)求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值.

(2)指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

解 (1)由题设知,二次型的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{bmatrix}$.

因秩 $A=2$,故$|A|=0$. 由此易求出 $c=3$,或由

$$A\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}-1&5&-3\\0&2&-1\\0&0&c-3\end{bmatrix}$$

及秩 $A=2$,知必有 $c=3$. 又由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}\overset{c_1+c_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-4&1&-3\\\lambda-4&\lambda-5&3\\0&3&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9).$$

得所求的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$.

(2)由这些特征值可知 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表椭圆柱面,因由 A 的特征值知,$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 可经非退化线性变换化为 $4y_2^2+9y_3^2=1$,且经非退化线性变换并不改变空间曲面的类型.

(二)矩阵及其正交相似标准形中参数的求法

因正交变换前后的两矩阵(即两二次型矩阵)为相似矩阵,常利用本节(一)中所述相似矩阵的性质求出其参数.

例 4[1993 年 4]　设二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$$

经正交变换 $X=QY$,化成 $f=y_1^2+2y_3^2$,其中 $X=[x_1,x_2,x_3]^{\mathrm{T}},Y=[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$ 是 3 维列向量,Q 是 3 阶正交阵,求常数 α,β.

解法一　正交变换前后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

由于 $B=Q^{\mathrm{T}}AQ=Q^{-1}AQ$,$A$ 与 B 相似,从而 $|A|=|B|$.

因　$$|A|=\begin{vmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\0&\beta-\alpha&0\end{vmatrix}=-(\beta-\alpha)^2,\ |B|=0.$$

故 $(\beta-\alpha)^2=0$,所以 $\alpha=\beta$.

又因相似矩阵有相同的特征多项式,故 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

而　$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-\alpha&-1\\-\alpha&\lambda-1&-\alpha\\-1&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+(-1)c_3}\begin{vmatrix}\lambda&-\alpha&-1\\0&\lambda-1&-\alpha\\-\lambda&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}1&-\alpha&-1\\0&\lambda-1&-\alpha\\-1&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+c_1}\lambda\begin{vmatrix}1&-\alpha&-1\\0&\lambda-1&-\alpha\\0&-\alpha&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda[(\lambda-1)(\lambda-2)+2\alpha^2]$$

$$=\lambda^3-3\lambda^2+2(1-\alpha^2)\lambda.$$

又显然有 $|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$.

比较等式 $\lambda^3-3\lambda^2+2(1-\alpha^2)\lambda=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$ 两端同次幂系数得到 $1-\alpha^2=1$ 即 $\alpha=0$. 从而 $\alpha=\beta=0$.

解法二　由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$,直接计算得到

$$\lambda^3-3\lambda^2+(2-\alpha^2-\beta^2)\lambda+(\alpha-\beta)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda.$$

比较同次幂系数有

$$2-(\alpha-\beta)^2=2,(\alpha-\beta)^2=0,$$

解之得 $\alpha=\beta=0$.

例 5[1993 年 1,2] 已知二次型 $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ $(a>0)$. 通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$. 求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

解 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{bmatrix}$. A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+a-a^2).$$

变换后的矩阵为 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,2,3)$. 因 A 与 Λ 相似,故 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$. 将 $\lambda_1=1$ 代入 $|\lambda E-A|$ 中得到 $|\lambda_1E-A|=0$ 即 $a^2-4=0$,因而 $a=\pm2$,而 $a>0$,故 $a=2$. 解

$$(\lambda_1E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},(\lambda_2E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0},(\lambda_3E-A)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

得到 A 的属于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=[0,1,-1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=[0,1,1]^{\mathrm{T}}.$$

显然它们两两正交,将它们单位化得

$$\eta_1=[1,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}]^{\mathrm{T}},\eta_2=[1,0,0]^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_3=[0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}]^{\mathrm{T}}.$$

故所求的正交变换矩阵为

$$Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=\begin{bmatrix}0&1&0\\1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}&0&1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

习　　题 6.5

1.[1988 年 1,2] 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

相似，求(1)x与y；(2)求一个满足$P^{-1}AP=B$的可逆阵P.

2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}2&3&0\\2&1&0\\1&1&x\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&y&2\\1&-3&z\end{bmatrix}$$

相似，求x,y,z.

3.［1998年1］ 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换$[x,y,z]^T=P[\xi,\eta,\zeta]^T$化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$. 求$a,b$的值和正交矩阵$P$.

第七章 线性空间和线性变换

§7.1 验证子集合是否为子空间的方法

验证数域 P 上线性空间 V 的非空子集合 W 是否为子空间，不必按线性空间的定义逐条验证，只须验证下述两条：

(i) 对任意 $\alpha,\beta\in W$，有 $\alpha+\beta\in W$；

(ii) 对任意 $\alpha\in W,k\in P$，有 $k\alpha\in W$，

是否满足．如果上述两条都满足，W 是 V 的子空间，否则不是．

值得注意的是，V 的非空子集合 W 即使是子空间，但如果 W 上的加法和数乘运算不是 V 上的运算，那么 W 不是 V 的子空间，只有 W 上的运算与 V 上的运算一致，W 才是 V 的子空间．

例 1 已知实数集 R 关于数的普通加法和乘法构成 R 上线性空间 V，又已知正实数集 R^+ 关于运算

$$a\oplus b=ab,k\circ a=a^k,$$

构成 R 上线性空间，问 R^+ 是不是 R 上线性空间 V 的子空间？

解 R^+ 不是 R 上线性空间 V 的子空间，因为 R^+ 虽然是 V 的子集，但其上的运算 $\oplus,\circ$ 不是 V 上的运算．解毕．

下面就 R^n，$M_{m,n}(R)$（所有 $m\times n$ 实矩阵组成的线性空间），$\mathscr{F}(R)$（从实数域 R 到 R 的所有函数的集合组成的线性空间）三种不同的线性空间，讨论其子空间的验证方法．

证法一 R^n 的非空子集合 W 一般由元素分量所满足的条件给出．验证时，应充分利用所给出条件．

例 2 R^n 中分量满足下列条件的全体向量 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]$ 的集合，能否构成 R^n 的子空间？

(1)　$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，(2)　$x_1\cdot x_2\cdots\cdot x_n=0$.

解　(1)设满足 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 的向量集合为 W_1，即

$$W_1=\{\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_n]\,|\,x_1+\cdots+x_n=0,x_i\in R\},$$

任取 $\alpha=[a_1,\cdots,a_n]$，$\beta=[b_1,\cdots,b_n]\in W_1$，则

$$a_1+\cdots+a_n=0,b_1+\cdots+b_n=0,$$

因 $(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)=(a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n)=0$，故 $\alpha+\beta=[\alpha_1+b_1,\cdots,a_n+b_n]\in W_1$. 又 $\lambda(a_1+\cdots+a_n)=0$ 故 $\lambda\alpha\in W_1$，因而 W_1 为 R^n 上的子空间．

(2) 设 $W_2=\{\boldsymbol{X}=[x_1,\cdots,x_n]\,|\,x_1\cdots x_n=0,x_i\in R\}$，取 $\alpha=[0,1\cdots,1]$，$\beta=[1,\cdots,1,0]$，则 $\alpha,\beta\in W_2$，但 $\alpha+\beta=[1,2,\cdots,2,1]\overline{\in}W_2$(因分量之积不等于零)，故 W_2 不是 R^n 上的子空间．

例 3　问下列各子集合是否为 R^3 的子空间：

(1) $V_1=\{\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]\,|\,x_1\cdot x_2\geqslant 0,x_i\in R\}$；

(2) $V_2=\{\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]\,|\,x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,x_i\in R\}$；

(3) $V_3=\{\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3]\,|\,x_i\in Q$，$Q$ 为有理数域$\}$.

解 (1) V_1 不是 R^3 的子空间．事实上，取 $\alpha=[a_1,a_2,a_3]=[2,2,1]$，$\beta=[b_1,b_2,b_3]=[-1,-4,1]$，因 $a_1a_2=2\cdot 2=4>0$，$b_1b_2=(-1)(-4)=4>0$，故 α、$\beta\in V_1$. 而

$$\alpha+\beta=[a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3]=[1,-2,2],$$

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)=1\cdot(-2)<0,$$

故 $\alpha+\beta$ 的分量不满足所给的关系式，从而 $\alpha+\beta\overline{\in}V_1$，于是 V_1 不是 R^3 的子空间．

(2)　设 $\alpha=[a_1,a_2,a_3]\in V_2$，则 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$，但取 $\lambda\in R$，且 $\lambda^2\neq 1$ 时，$\lambda\alpha=[\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3]$因$(\lambda a_1)^2+(\lambda a_2)^2+(\lambda a_3)^2=\lambda^2\neq 1$，故 $\lambda\alpha\overline{\in}V_2$，从而 V_2 也不是 R^3 的子空间．

(3)　任取 $\alpha=[a_1,a_2,a_3]\in V_3$，则 $a_1,a_2,a_3\in Q$. 取 $\lambda=\sqrt{2}\in R$，则 $\lambda\alpha_i=\sqrt{2}\,a_i\overline{\in}Q$，故 $\lambda\alpha=[\sqrt{2}\,a_1,\sqrt{2}\,a_2,\sqrt{2}\,a_3]\overline{\in}V_3$，因而 V_3 不是 R^3 的子空间．解毕

注意 由上述各例可知，如果 R^n 的子集元素条件由其分量的不等式给出[本节例 3(1)]；或由含非零常数加项的等式给出[本节例 3(2)]；或由含分量方幂大于 1 的等式给出[本节例 2(2)，例 3(2)]；或由缩小分量取值范围(较实数域 R 小)的方式给出[本节例 3(3)]，由这些条件所确定的子集一般不是实数域 R 上线性空间 $V=R^n$ 的子空间．

例 4 设 A 为 n 阶实对称矩阵，问在什么条件下，满足 $XAX^{\mathrm{T}}=0$ 的 n 维实向量 $X=[x_1,x_2\cdots,x_n]$构成 R^n 的子空间．

解 令 $W=\{X|X\in R^n,XAX^{\mathrm{T}}=0\}$. 因 $0\in W$，故 W 非空．

任取 $X\in W$，$\forall\ k\in R$，因$(kX)A(kX)^{\mathrm{T}}=k^2(XAX^{\mathrm{T}})=k^2\cdot 0=0$，故 $kX\in W$. 又$\forall\ X,Y\in W$，则由 $XAT^{\mathrm{T}}=YAY=0$，得到

$$(X+Y)A(X+Y)^{\mathrm{T}}=(X+Y)A(X^{\mathrm{T}}+Y^{\mathrm{T}})$$

$$=XAX^{\mathrm{T}}+YAX^{\mathrm{T}}+XAY^{\mathrm{T}}+YAY^{\mathrm{T}}=YAX^{\mathrm{T}}+XAY^{\mathrm{T}}.$$

因而对$\forall\ X,Y\in W$，如果有 $XAY^{\mathrm{T}}=YAX^{\mathrm{T}}=0$，则$(X+Y)A(X+Y)^{\mathrm{T}}=0$，从而 $X+Y\in W$，故 W 为 R^n 的子空间的条件是对于任意 $X,Y\in W$ 有 $XAY^{\mathrm{T}}=YAX^{\mathrm{T}}=0$. 由 X,Y 的任意性这些条件也可说成：对任意 $X,Y\in W$，有 $XAY^{\mathrm{T}}=0$.

证法二 $V=M_{m,n}(R)$时，验证 V 的非空子集 W 为 V 的子空间，只须验证前述两条成立．

值得注意的是，欲否定一子集 W 为 V 的子空间，常举反例说明 V 中所定义的加法或数乘运算不对 W 中任意元都成立，因而 V 上的运算不是 W 上的运算，故子集 W 在 V 的两种运算下不构成它的子空间．

例 5 $V=M_n(R)$(所有 n 阶实矩阵所组成的线性空间)的下列子集合是否为其子空间？

(1) 所有 n 阶实反对称矩阵的集合 W_1；

(2) 所有 n 阶实对称矩阵的集合 W_2.

解 (1)W_1 为 $V=M_n(R)$的子空间，因为任取 $A,B\in W_1$，则 $A=-A^{\mathrm{T}},B=-B^{\mathrm{T}}$，故 $A+B=-A^{\mathrm{T}}-B^{\mathrm{T}}=-(A+B)^{\mathrm{T}}$，从而 $A+B$

$\in W_1$，且对任意数 $\lambda \in R$，有 $\lambda \boldsymbol{A} = -\lambda \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -(\lambda \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}$，因而 $\lambda \boldsymbol{A} \in W_1$，故 W_1 为 V 的子空间．

(2)同法可证 W_2 为 V 的子空间．

例 6 下列子集合哪个是 $V=M_n(R)$ 的子空间：

(1) 不可逆矩阵的全体集合 W_1；

(2) $W_2=\{X \mid AX=XB$，且 A,B 为已知的 n 阶矩阵$\}$；

(3) 所有 n 阶幂零矩阵(见 § 5.1 例 9)的集合 W_3.

解 (1)W_1 不是 V 的子空间，因为当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是不可逆矩阵时，相加后所得矩阵不一定仍为不可逆矩阵。例如，

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

显然，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 不可逆，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 却可逆，即 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in W_1$，但 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \overline{\in} W_1$，因而 W_1 对 V 的加法不封闭，故 W_1 不是 V 的子空间．

(2) 任取 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y} \in W_2$，则 $A\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}B$，$A\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}B$，因而

$$A(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=A\boldsymbol{X}+A\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}B+\boldsymbol{Y}B=(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})B,$$

$$A(\lambda\boldsymbol{X})=\lambda A\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}=(\lambda\boldsymbol{X})B(\lambda \text{ 为任一实数}),$$

故 $\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y} \in W_2$，$\lambda\boldsymbol{X} \in W_2$，$W_2$ 为 V 的子空间．

(3)W_3 不是 V 的子空间．事实上，

令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，

显然，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{O}$，因而 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是幂零矩阵，故 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B} \in W_3$，但对任意正整数 $\boldsymbol{k}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^k=E^k=E \neq O$，即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不是幂零矩阵，故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \overline{\in} W_3$，从而 W_3 不是 V 的子空间．

证法三 设 $\mathscr{F}(R)$是从实数域 R 到 R 的所有函数的集合，对任意 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g} \in \mathscr{F}(R)$，$\lambda \in R$，定义

$$(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g})x=\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x),\ (\lambda\boldsymbol{f})x=\lambda\boldsymbol{f}(x)\ (x \in R).$$

关于上述运算，$\mathscr{F}(R)$组成实数域 R 上的线性空间．验证 $\mathscr{F}(R)$ 的子集合是否为其子空间时，注意反复利用上述定义和子集合元素的性质．

例 7 试验证下列子集合是$\mathscr{F}(R)$的子空间：

(1)所有连续函数的集合 W_1；(2)所有奇函数的集合 W_2.

证 (1)任取 $f,g\in W_1,\lambda\in R$,因 $f+g,\lambda f$ 均为连续函数,故 $f+g,\lambda f\in W_1$,从而 W_1 为 $\mathscr{F}(R)$的子空间.

(2)任取 $f,g\in W_2$,则 f、g 为奇函数,即 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$,于是有

$$\begin{aligned}(f+g)(-x)&=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)\\&=-(f(x)+g(x))=-(f+g)x,\end{aligned}$$

且对任意数 $\lambda\in R$

$$(\lambda f)(-x)=\lambda f(-x)=\lambda[-f(x)]=-(\lambda f)x,$$

故 $f+g,\lambda f\in W_2$,W_2 为 $\mathscr{F}(R)$的子空间.

例 8 下列集合是否是$\mathscr{F}(R)$的子空间：

(1) $W_1=\{f\mid f\in\mathscr{F}(R),f(0)=f(1)\}$；

(2) $W_2=\{f\mid f\in\mathscr{F}(R),f(1)=1+f(0)\}$.

解 (1)$f(x)=c$(c 为常数)时,$f(0)=f(1)=c$,$f(x)\in W_1$,故 W_1 非空.

设 $f,g\in W_1$,有 $f(0)=f(1)$,$g(0)=g(1)$,由此得到

$$(f+g)(0)=f(0)+g(0)=f(1)+g(1)=(f+g)(1),$$

$$(\lambda f)(0)=\lambda[f(0)]=\lambda[f(1)]=(\lambda g)(1).$$

故 $f+g$, $\lambda f\in W_1$, 其中 λ 为任意实数, 因而 W_1 为 $\mathscr{F}$ (R) 的子空间.

(2) 设 $f(x)=x$,则 $f(1)=1=f(0)+1$,故 $f\in W_2$,因而 W_2 非空.任取 $g,h\in W_2$,有 $g(1)=1+g(0)$,$h(1)=1+h(0)$.

$$\begin{aligned}(g+h)(1)&=g(1)+h(1)=1+g(0)+1+h(0)\\&=(g+h)(0)+2\neq(g+h)(0)+1.\end{aligned}$$

故 $g+h\overline{\in}W_2$,因而 W_2 不是 $\mathscr{F}(R)$的子空间.证毕.

注意 非空性不是显然的子集合,应首先验证,如上例.

最后谈一个易混淆的问题,以结束本节.

例 9 W_1,W_2 为线性空间 V 的两个子空间,且令

$$W_1\cap W_2=\{X\mid X\in W_1\quad 且\ X\in W_2\},$$
$$W_1\cup W_2=\{X\mid X\in W_1\quad 或\ X\in W_2\}.$$

问 $W_1\cap W_2, W_1\cup W_2$ 是否分别都构成子空间？如果能构成子空间，证明之；如果不能，举出反例．

证 (1) $W_1\cap W_2$ 是 V 的子空间，证明如下．

因 W_1, W_2 为线性子空间，均含有零元，故 $W_1\cap W_2$ 最少含有零元，因而 $W_1\cap W_2$ 是非空集．

假如 $\alpha,\beta\in W_1\cap W_2$，则 $\alpha,\beta\in W_1$；$\alpha,\beta\in W_2$. 因 W_1, W_2 为子空间，故 $\alpha+\beta\in W_1$，$\alpha+\beta\in W_2$，于是 $\alpha+\beta\in W_1\cap W_2$. 同样，因 $\lambda\alpha\in W_1$，$\lambda\alpha\in W_2$，故 $\lambda\alpha\in W_1\cap W_2$，因而 $W_1\cap W_2$ 是 V 的子空间．

(2) $W_1\cup W_2$ 不一定是 V 的子空间．下举反例．

取 $V=R^2$，令 $W_1=\{[x,0]\mid x\in R\}$，$W_2=\{[0,y]\mid y\in R\}$，则它们均为 R^2 的子空间，取 $\alpha=[1,0]$，$\beta=[0,1]$，显然 $\alpha,\beta\in W_1\cup W_2$，但 $\alpha+\beta=[1,0]+[0,1]=[1,1]\overline{\in} W_1\cup W_2$，因而 $W_1\cup W_2$ 不是 R^2 的子空间．证毕

读者也许会追问，在什么条件下 $W_1\cup W_2$ 为 V 的子空间呢？请看下例．

例 10 W_1, W_2 为数域 P 上线性空间 V 的子空间，试证 $W_1\cup W_2$ 为 V 的子空间 $\leftrightarrow W_1\subseteq W_2$ 或 $W_1\supseteq W_2$.

证 设 $W_1\cup W_2$ 为 V 的子空间，下证 $W_1\subseteq W_2$ 或 $W_2\subseteq W_1$. 用反证法证之．事实上，如果上述两个包含关系都不成立，则存在 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 使 $\boldsymbol{x}\in W_1$，$\boldsymbol{x}\overline{\in} W_2$，$\boldsymbol{y}\in W_2$，$\boldsymbol{y}\overline{\in} W_1$. 于是

$$\boldsymbol{x}\in W_1\subseteq W_1\cup W_2,\quad \boldsymbol{y}\in W_2\subseteq W_1\cup W_2.$$

又由题设 $W_1\cup W_2$ 为子空间，故 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_1\cup W_2$，因而 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_1$ 或 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_2$.

如 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_1$，由 $\boldsymbol{x}\in W_1$，得 $-\boldsymbol{x}\in W_1$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in W_1$，与 $\boldsymbol{y}\overline{\in} W_1$ 矛盾．

如 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W_2$，由 $\boldsymbol{y}\in W_2$，得 $-\boldsymbol{y}\in W_2$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}\in W_2$，与 $\boldsymbol{x}\overline{\in} W_2$ 矛盾，故 $W_1\subseteq W_2$ 或 $W_1\supseteq W_2$.

反之，如 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_1 \supseteq W_2$，因 $W_1 \cup W_2 = W_2$ 或 $W_1 \cup W_2 = W_1$，故 $W_1 \cup W_2$ 为 V 的子空间.

习　　题　7.1

1. 下列集合是否是 R^n 的子空间，为什么？

(1) 分量是整数的所有向量；

(2) 第 1、第 2 分量相等的所有向量；

(3) 奇数分量之和等于偶数分量之和的所有向量；

(4) 分量之和不等于 1 的所有向量.

2. 设 $V = R^4$，问 $W_1 = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid x_i \geq 0, x_1, x_2, x_3, x_4 \in R\}$ 是否为 V 的子空间？为什么？

3. 设 $V = M_n(R)$，问下列集合是否是 V 的子空间？

(1) 所有行列式等于零的 n 阶矩阵的集合 W_1；

(2) 主对角元为 0 的所有 n 阶方阵的集合 W_2；

(3) 所有可逆的 n 阶矩阵的集合 W_3.

4. 下列子集合是否为 $\mathscr{F}(R)$ 的子空间？

(1) 偶函数集合 W_1；

(2) $W_2 = \{f \mid f \in \mathscr{F}(R), f(3) = 0\}$；

(2) $W_3 = \{f \mid f \in \mathscr{F}(R), f(7) = 2 + f(1)\}$.

§7.2　线性空间基(底)的求法

求一般线性空间的基是很困难的，下面仅就几种特殊线性空间介绍其基的求法.

解法一　找出一组结构最简单的元素，使 V 中任意元素能写成它们的线性组合，如能证这一组元素线性无关，则该组元素就是 V 的一组基.

例 1　求下列线性空间的一组基：

(1)　实数域 R 上的线性空间 R^n；

(2) 数域 P 上不超过 n 次的多项式加上零多项式所成的线性空间 $P[x]_n$；

(3) 实数域的 $m\times n$ 矩阵所成的线性空间 $M_{m,n}(R)$.

解 (1)取 R^n 的一组结构最简单的元素：

$$\varepsilon_i=[0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]^T(i=1,2,\cdots,n).$$

(第 i 个分量为 1，其余分量为 0.)

任取 $\alpha=[x_1,x_2,\cdots x_n]^T\in R^n$，则

$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_i\varepsilon_i+\cdots+x_n\varepsilon_n(x_i\in R).$$

又因秩$[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n]$=秩 $E_n=n$，故 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关，从而 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 R^n 的一组基，称为 R_n 的标准基(自然基).

(2)$P[x]_n$ 中最简单元素可取为 $1,x,\cdots,x^n$，任取 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\in P[x]_n$，显然 $f(x)$是它们的线性组合；又它们线性无关．事实上，由

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0,$$

可知 $a_0=a_1=\cdots=a_n=0$，故 $1,x,\cdots,x^n$ 为 $P[x]_n$ 的一组基，且称为 $P[x]_n$ 的标准基(自然基).

(3)在 $M_{m,n}(R)$中，取一组结构最简单的矩阵即第 i 行，第 j 列元素为 1，其余元素为 0 的 $m\times n$ 矩阵 E_{ij}，其中 $i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$，则 $M_{m,n}(R)$中任意矩阵 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$可表为 E_{ij}的线性组合．事实上，

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+\cdots+a_{1n}E_{1n}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22}+\cdots+$$
$$a_{2n}E_{2n}+\cdots+a_{n1}E_{n1}+a_{n2}E_{n2}+\cdots+a_{nn}E_{nn}. \qquad (7.2.1)$$

且 $E_{ij}(i=,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$线性无关．事实上，令(7.2.1)式等于零，则对一切 i,j 有 $a_{ij}=0$，故 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{nn}$线性无关．于是 $E_{ij}(i=1,2,\cdots m;j=1,2,\cdots,n)$就是 $M_{m,n}(R)$的一组基，且称为 $M_{m,n}(R)$的标准基(自然基).

例 2[6.9] 求实数域 R 上全体 n 阶对称矩阵构成的线性空间的一组基．

解 在 n 阶实对称矩阵构成的线性空间中，结构最简单的元

素为第 i 行，第 j 列元素与第 j 行，第 i 列元素为 1，其余元素为 0 的矩阵：

$$\widetilde{A}_{ij}=\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots\cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & \uparrow & \qquad & \uparrow & \\ & \text{第 } i \text{ 列} & & \text{第 } j \text{ 列} & \end{array} & \end{array}$$

任取实对称矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$，由于 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，$A$ 表为

$$A=\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\widetilde{A}_{ij}.$$

又易证 $\{\widetilde{A}_{ij}\,|\,i=1,2,\cdots,n;j=i,i+1,\cdots,n\}$ 线性无关，这里 $j=i,i+1,\cdots,n$ 表示由于 A 的对称性 $(a_{ji}=a_{ji})$，$\widetilde{A}_{ij}$ 的个数等于主对角元与其上方元素的个数之和，故矩阵组 $\{\widetilde{A}_{ij}\,|\,i=1,2,\cdots,n;j=i,i+1,\cdots,n\}$ 中共含

$$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=n(n+1)/2$$

个 n 阶实对称矩阵，于是该线性空间的维数为 $n(n+1)/2$. 解毕

线性空间的基不是唯一的，除去标准基外，还可以根据不同的条件和需要，用下述各法求出其他的基.

解法二 先求出线性空间 V 的维数 n，然后找出 n 个元，证明它们线性无关. 如果维数不便求出，先找出一组元，使 V 中任意元素都可以写成它们的线性组合，再证明这一组元线性无关.

例 3 $P[x]_{n-1}$ 是数域 P 上次数小于 n 的多项式加上零多项式所组成的线性空间. 给定 n 个互不相等的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，令

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

试证多项式组 $f_i(x)=f(x)/(x-a_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $P[x]_{n-1}$ 的

一组基.

证 因 $P[x]_{n-1}$ 是 n 维线性空间,为证 n 个多项式 $f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组基,只须证明它们线性无关.

首先应注意,因 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 互异,故

$$f_i(a_i)\neq 0,f_i(a_j)=0,(i\neq j;i,j=1,2\cdots,n).$$

设 $k_1\boldsymbol{f}_1(x)+\cdots+k_i\boldsymbol{f}_i(x)+\cdots+k_n\boldsymbol{f}_n(x)=\mathbf{0}$,由上式,当 $x=a_i$ 时,得到 $k_i\boldsymbol{f}_i(a_i)=0$. 故 $k_i=0(i=1,2,\cdots,n)$,所以 $\boldsymbol{f}_1(x),\boldsymbol{f}_i(x),\cdots,\boldsymbol{f}_n(x)$ 线性无关.

例 4 求 $P[x]_n$ 的子空间 $W=\{\boldsymbol{f}(x)|\boldsymbol{f}(1)=0\}$ 的一组基.

解 任取 $f(x)=a_0\cdot 1+a_1x+\cdots+a_nx^n\in P[x]_n$,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$(数域). 由于空间生成条件 $f(1)=0$,即 $a_0+a_1+\cdots+a_n=0$,得到 $a_0=-a_1-a_2-\cdots-a_n$,因而

$$f(x)=a_1(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+a_2(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1})+\cdots+a_n(\boldsymbol{x}^n-\mathbf{1}),$$

这说明 W 中任意元可写成 $\boldsymbol{x}-\mathbf{1},\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{x}^n-\mathbf{1}$ 的线性组合,如能证它们线性无关,则它们为所求的一组基. 事实上,设

$$k_1(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})+k_2(\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1})+\cdots+k_n(\boldsymbol{x}^n-\mathbf{1})=0,$$

即 $k_nx^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x-(k_1+\cdots+k_n)=0.$

得到 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$,从而 $\boldsymbol{x}-\mathbf{1},\boldsymbol{x}^2-\mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{x}^n-\mathbf{1}$ 线性无关.

解法三 行列式法.

n 维线性空间 R^n 的一组向量 $\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}](i=1,2,\cdots,n)$ 为 R^n 的一组基,当且仅当行列式 $|a_{ij}|_{n\times n}\neq 0$.

如果已知 R^n 中一组线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 及其分量,欲求一组包含这组已知向量的基,可根据上行列式不等于零的条件选取其他基向量.

例 5 设 $\alpha_1=[1,0,1,0],\alpha_2=[1,-1,2,0,]$ 求含 α_1,α_2 的 R^4 的一组基.

解 以 α_1,α_2 为 2 个行向量,再添补 2 个行向量使所形成的 4 阶行列式不等于零就行了.

满足这要求的添补方法很多,最简单的是把 α_1,α_2 作为前 2

行，取 $\varepsilon_3=[0,0,1,0]$，$\varepsilon_4=[0,0,0,1]$作为后 2 行，这样得到的 4 阶行列式不为 0，因而这 4 个行向量线性无关．它包含所给的两个行向量，是所求的一组基．

解法四 逐个选择法．

已知线性空间 V 的维数 n 及一组向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，从中挑选一组基($k>n$)或添补若干个向量($k<n$)使之成为一组基，可用逐个选择法．

当 $k<n$ 时，设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 线性无关，取 V 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$．

把 β_i 中能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合的向量一一去掉，把不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合的向量 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_{n-k}}$留下，与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 组成 V 的一组基(见下例)．

当 $k>n$ 且 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 中含 n 个线性无关向量时，可如下选取 V 的一组基：

任取非零向量 α_{i_1}，去掉与 α_{i_1}成比例的所有向量，留下与 α_{i_1}不成比例且编号最小的向量 α_{i_2}；再去掉能写成 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$的线性组合的所有向量，留下不能写成 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2}$的线性组合且编号最小的向量 α_{i_3}，如此继续，最后去掉能写成 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{n-1}}$的线性组合的所有向量，留下不能写成它们的线性组合且编号最小的向量 α_{i_n}，如此得到的 n 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_n}$线性无关，故为 V 的一组基．

例 6[6.4] 已知 n 维线性空间 V，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\in V(m<n)$线性无关，证明存在包含 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的 V 的一组基．

解 取 V 的一组基 $\beta_1,\beta_1,\cdots,\beta_n$．设在 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合且编号最小的为 β_{i_1}，如 $m+1=n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1}$即为所求的一组基．

如 $m+1<n$，再在 $\beta_{i_1+1},\beta_{i_1+2},\cdots,\beta_n$ 中挑出不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1}$的线性组合，且编号最小的向量设为 β_{i_2}．如 $m+2=n$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1},\beta_{i_2}$即为所求的一组基．

如 $m+2<n$，仿上可求出 β_{i_3}，直到求出 β_{i_k} 使 $m+k=n$ 为止，这时 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_k}$ 为 V 的一组基．

例 7 试用逐个选择法求本节例 5 中 R^4 的一组基．

解 取 R^4 的一组标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$. 考察每个 ε_i 与 α_1,α_2 的线性关系．

易求秩$[\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_i]=3(i=1,2,3,4)$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_i$ 线性无关，但 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 中不能写成 α_1,α_2 的线性组合且编号最小的是向量 ε_1，则 ε_1 留下．因 $2+1=3<4$，再在 $\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 中挑出不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1$ 的线性线合，且编号最小的向量．因秩$[\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2]=3$，事实上 $\varepsilon_2=2\alpha_1-\alpha_2-\varepsilon_1$，故去掉 ε_2，而秩$[\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1,\varepsilon_j]=4(j=3,4)$，因 $\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 中不能写成 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1$ 的线性组合，且编号最小的为 ε_3，至此 $m+2=2+2=4=n$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\varepsilon_1,\varepsilon_3$ 为所求的 R^4 的一组基．

解法五 初等变换法．

分量已知的生成元所生成的线性子空间可用初等变换法求出其基．

例 8 求 R^4 中由下列向量生成的子空间 W 的一组基：

$$\alpha_1=[1,-1,0,1]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[0,1,2,-1]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_3=[-1,0,1,0]^{\mathrm{T}},\alpha_4=[1,-1,3,1]^{\mathrm{T}}.$$

并把其余向量用该组基线性表示．

解 $$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1.$$

因变换矩阵 A_1 中任意 3 个列向量均线性无关，由命题 3.2.1 知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的极大无关组为其中任意 3 个列向量，它们都为 W 的一组基．如取 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一组基，由上述变换矩阵 A_1 及命题 3.2.1 知 $\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

解法六 解方程组法．

生成元(的分量)满足方程组的子空间，其基可由解方程组的

方法求出，该方程组的一个基础解系就是该子空间的一组基．

例 9 设 $A\in M_{m,n}(R)$，求 R^n 的下列子空间的一组基：

$$W=\{X\mid X\in R^n, AX=\mathbf{0}\}.$$

解 设秩 $A=r$，则 $AX=\mathbf{0}$ 的一个基础解系含 $n-r$ 个解向量，设为 $\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$，它们为 W 的一组基．

例 10 求下列子空间 W 的一组基：

$$W=\left\{[x,y,z,u]\left|\begin{matrix}x+y+3z+3u=0, x+2z+u=0\\ x+3y+5z+7u=0, y+z+2u=0\end{matrix}\right.\right\}.$$

解 求出生成元的分量 x,y,z,u 所满足的上述方程组的一个基础解系就是 W 的一组基．用初等行变换求之．易得到

$$A=\begin{bmatrix}1&1&3&3\\0&1&1&2\\1&0&2&1\\1&3&5&7\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1.$$

由 A_1 得一个基础解系即为 W 的一组基：

$$\alpha_1=[-2,-1,1,0],\alpha_2=[-1,-2,0,1].$$

例 11 求 R^n 的下列子空间的维数和一组基：

$W=\{[x_1,,\cdots,x_n]\mid x_1+\cdots+x_n=0, x_1,\cdots,x_n\in R\}.$

解 W 的生成元分量满足方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. 由基础解系的简便求法（见 § 4.1），得其基础解系为

$\alpha_1=[-1,1,0,\cdots,0],\alpha_2=[-1,0,1,0,\cdots,0],\cdots,$

$\alpha_{n-2}=[-1,0,\cdots,1,0],\alpha_{n-1}=[-1,0,\cdots,0,1].$

即为 W 的一组基，且其维数为 $n-1$.

例 12[1997 年 1] 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵，$\alpha_1=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=[-1,1,4,-1]^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=[5,-1,-8,9]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $BX=\mathbf{0}$ 的解向量，求 $BX=\mathbf{0}$ 的解空间的一组标准正交基．

解 因秩 $B=2$，故解空间的维数为 $4-2=2$. 又 α_1,α_2 线性无关，故 α_1,α_2 是解空间的一组基．

取 $\beta_1=\alpha_1=[1,1,2,3]^{\mathrm{T}}$，则如 β_1 正交的向量为

$$\begin{aligned}\beta_2&=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\&=[-1,1,4,-1]^{T}-(1/3)[1,1,2,3]^{T}\\&=[-4/3,2/3,10/3,-2]^{T},\end{aligned}$$

单位化得

$$\eta_1=(1/\sqrt{15})[1,1,2,3]^{T},\eta_2=(1/\sqrt{39})[-2,1,5,-3]^{T},$$

即为所求的一组标准正交基.

习　　题 7.2

1. 试求数域 P 上全体 n 阶上(下)三角矩阵所成的线性空间的一组基.

2. 求 $M_{3,4}(R)$的一组基,其维数是多少?

3. [4.16]用初等行变换证明 $\alpha_1=[1,-1,0]^{T}$,$\alpha_2=[2,1,3]^{T}$,$\alpha_3=[3,1,2]^{T}$ 为 R^3 的一组基,并把 $\alpha_4=[5,0,7]^{T}$,$\alpha_5=[-9,-8,-13]^{T}$ 用这组基线性表示.

4. 设 $\alpha_1=[3,4,1,2,3]$,$\alpha_2=[5,7,1,3,4]$,$\alpha_3=[4,5,2,1,5]$,试证它们线性无关,并求向量 α_4,α_5 使之与给定的 3 个向量构成 5 维线性空间的一组基.

5. 求 R^5 的下列子空间 W 的一组基:

$$W=\left\{[x,y,z,u,v]\,\middle|\,\begin{array}{l}x-2y+3z-u-2v=0\\x-y-z+2u-v=0\end{array}\right\}.$$

§7.3　两子空间相同的证法

证法一　证两子空间互相包含.

例 1　设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 等价,令

$$V_1=\{X=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m\mid\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in P\},$$

$$V_2=\{Y=\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_s\alpha_s\mid\mu_1,\cdots,\mu_s\in P\},$$

其中 P 为数域,试证 $V_1=V_2$.

证 任取 $X\in V_1$，则 $X=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_m\alpha_m$，又因两向量组等价，故每 α_i 都可用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表出：

$$\alpha_i=k_{i1}\beta_1+k_{i2}\beta_1+\cdots+k_{is}\beta_s(i=1,2,\cdots,m),$$

故

$$\begin{aligned}X&=\lambda_1(k_{11}\beta_1+k_{12}\beta_2+\cdots+k_{1s}\beta_s)+\\&\quad\lambda_2(k_{21}\beta_1+k_{22}\beta_2+\cdots+k_{2s}\beta_s)+\cdots+\\&\quad\lambda_m(k_{m,1}\beta_1+k_{m,2}\beta_2+\cdots+k_{m,s}\beta_s)\\&=(\lambda_1k_{11}+\lambda_2k_{21}+\cdots+\lambda_mk_{m,1})\beta_1+\\&\quad(\lambda_1k_{12}+\lambda_2k_{22}+\cdots+\lambda_mk_{m,2})\beta_2+\cdots+\\&\quad(\lambda_1k_{1s}+\lambda_2k_{2s}+\cdots+\lambda_mk_{m,s})\beta_s.\end{aligned}$$

因而 X 为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性组合，故 $X\in V_2$，$V_1\subseteq V_2$. 同理可证 $V_2\subseteq V_1$. 所以 $V_1=V_2$.

例 2[6.3] 设 V_1 和 V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1\subset V_2$，如果 V_1 的维数等于 V_2 的维数，试证 $V_1=V_2$.

证 设维 V_1 = 维 $V_1=r$，且 V_1 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，则

$$\begin{aligned}V_1&=\{\alpha=\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_r\alpha_r\mid\lambda_i\in P,i=1,2,\cdots,r\}\\&=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r).\end{aligned}$$

因 $V_1\subset V_2$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in V_2$，而维 V_2 = 维 $V_1=r$，于是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 也为 V_2 的一组基，故 V_2 的任意元 β 有

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\in V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r),$$

因而 $V_2\subseteq V_1$，所以 $V_2=V_1$.

例 3 证明线性变换 T 的象空间 $T(V)$ 与由线性空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的象 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 所生成的子空间相同，即

$$T(V)=L(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)).$$

证 任取 $T(\alpha)\in T(V)$，且设 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，$T$ 为线性变换，则

$$\begin{aligned}T(\alpha)&=T(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)\\&=k_1T(\alpha_1)+\cdots+k_nT(\alpha_n)\in L(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))\end{aligned}$$

从而 $T(V)\subseteq L(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))$. 下证

$$T(V)\supseteq L(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n)).$$

任取 $\beta\in L(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))$，则 $\beta=t_1T(\alpha_1)+\cdots+t_nT(\alpha_n)$，$T$ 为线性变换，故 $\beta=T(t_1\alpha_1+\cdots+t_n\alpha_n)$，因 $t_1\alpha_1+\cdots+t_n\alpha_n\in V$，故 $\beta\in T(V)$，从而 $T(V)\supseteq L(T(\alpha_1),\cdots,T(\alpha_n))$，故

$$T(V)=L(T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)).$$

证法二 证两子空间的生成元向量组等价(见本节例1).

例4 试证明 R^4 中由 $\alpha_1=[1,1,1,1]$，$\alpha_2=[1,0,1,0]$生成的子空间 V_1 与由 $\beta_1=[1,2,1,2]$，$\beta_2=[2,-1,2,-1]$生成的子空间 V_2 是一致的.

证 由观察得到

$$\begin{cases}\beta_1=2\alpha_1-\alpha_2,\\ \beta_2=-\alpha_1+3\alpha_2.\end{cases}\text{因而}\begin{cases}\alpha_1=(3/5)\beta_1+(1/5)\beta_2,\\ \alpha_2=(1/5)\beta_1+(2/5)\beta_2.\end{cases}$$

故两生成元向量组等价，于是 $V_1=V_2$.

例5 设 V 为数域 P 上线性空间，$\alpha,\beta,\delta\in V$ 满足条件 $a\alpha+b\beta+c\delta=\mathbf{0}(a,b,c\in P)$，如果 $ac\neq0$，证明由 α,β 生成的子空间与由 β,δ 生成的子空间相同.

证 设 $U=L(\alpha,\beta)$，$W=L(\beta,\sigma)$，$ac\neq0$，得到 $a\neq0$，于是 $\alpha=(-b/a)\beta+(-c/a)\delta$，从而 α 可经 β,δ 线性表出. 显然，$\beta=\beta+0\delta$ 可经 β,δ 线性表出，于是 α,β 可经 β,δ 线性表出.

同法可证 β,δ 也可经 α,β 线性表出. 于是两生成元向量组 α,β 与 δ,β 等价，故 V_1 与 V_2 一致. 证毕

由例2可得两子空间相同的另一证法：

证法三 证两子空间的维数相等，且一个包含在另一个之中

特别若子空间 $W\subset R^n$，且 W 的维数为 n，则 $W=R^n$.

此法常用于证明线性空间 V 的子空间 V_1 与 V 相等. 因 $V_1\subseteq V$，显然，只须证两者的维数相等.

例6[4.14] 试证由 $\alpha_1=[0,1,1]^T$，$\alpha_2=[1,0,1]^T$，$\alpha_3=[1,1,0]^T$ 所生成的子空间 W 与 R^3 相同.

证明一 因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\in R^3$，故 $W\subseteq R^3$ 下证 W 与 R^3 的维数相等．事实上，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故维 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3=$维 R^3，因而 $W=R^3$(见本节例 2).

证明二 取 R^3 的一组标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，则 $R^3=L(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$. 由 $\alpha_1=\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_3,\alpha_3=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 得到，$\varepsilon_1=(1/2)(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1),\varepsilon_2=(1/2)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3),\varepsilon_3=(1/2)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)$，因而两生成元向量组等价，故 $W=R^3$.

证明三 显然 $W\subseteq R^3$，下证 $R^3\subseteq W$，任取 $X=[x_1,x_2,x_3]\in R^3$，由证明二可知，

$$
\begin{aligned}
X&=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3=(x_1/2)(\alpha_2+\alpha_3-\alpha_1)+\\
&\quad(x_2/2)(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)+(x_3/2)(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3)\\
&=(1/2)(-x_1+x_2+x_3)\alpha_1+(1/2)(x_1-x_2+x_3)\alpha_2+\\
&\quad(1/2)(x_1+x_2-x_3)\alpha_3,
\end{aligned}
$$

因而 R^3 中任一元 X 都可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，于是 $X\in W$，由 X 的任意性，得到 $R^3\subseteq W$，故 $W=R^3$.

例 7 设 $\alpha_1=[1,2,2,-2]^{\mathrm T},\alpha_2=[-1,3,0,-11]^{\mathrm T},\alpha_3=[2,-1,-2,5]^{\mathrm T}$ 生成的 R^4 的子空间记为 U，试从下列向量中挑选出 U 的生成元：

$\beta_1=[3,1,0,3]^{\mathrm T}$，　　　$\beta_2=[2,-1,0,3]^{\mathrm T}$，

$\beta_1=[3,-4,-2,16]^{\mathrm T}$，　$\beta_4=[1,7,4,-15]^{\mathrm T}$.

解 将矩阵$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \beta_1,\beta_2,\beta_2,\beta_4]$初等行变换，得到

$$
\left[\begin{array}{ccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 2\\
0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0
\end{array}\right].
$$

令 $W=L(\beta_1,\beta_2,\beta_4)$，则因秩$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=$秩$[\beta_1,\beta_3,\beta_4]=3$，故维 $W=$维 U，下证 $W\subset U$. 事实上，因

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_3,\beta_3=-\alpha_2+\alpha_3,\beta_4=2\alpha_1+\alpha_2,$$

故 $\beta_1,\beta_2,\beta_4\in U$，从而 $W\subseteq U$，由本节证法三可知，$W=U$，从而 β_1，

β_3,β_4 为 U 的一组生成元.

例 8 设 R^4 中的向量

$$\alpha_1=[3,-1,1,0]^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_2=[1,0,3,1]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_3=[-2,1,2,1]^{\mathrm{T}},\qquad \alpha_4=[0,1,8,3]^{\mathrm{T}},$$
$$\alpha_5=[-1,1,5,2]^{\mathrm{T}}.$$

试证 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\alpha_4,\alpha_5)$.

证明一 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \vdots \alpha_4,\alpha_5]$. 经初等行变换 A 变为

$$A_1=\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&0&2&1\\0&1&1&3&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right].$$

由命题 3.2.1 知,维 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$维 $L(\alpha_4,\alpha_5)$,且

$$\begin{cases}\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_3;\\ \alpha_5=\alpha_1+2\alpha_3,\end{cases}\tag{7.3.1}$$

$L(\alpha_4,\alpha_5)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,所以 $L(\alpha_4,\alpha_5)=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$.

证明二 由 A_1 可观察出

$$\begin{cases}\alpha_1=2\alpha_4-3\alpha_5;\\ \alpha_2=\alpha_4-\alpha_5;\\ \alpha_3=-\alpha_4+2\alpha_5,\end{cases}\tag{7.3.2}$$

由(7.3.1)与(7.3.2)式知,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与 α_4,α_5 等价.

证明三 由 A_1 易看出 $\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3$,故 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=L(\alpha_1,\alpha_3)$.下证 $L(\alpha_1,\alpha_3)=L(\alpha_4,\alpha_5)$. 显然维 $L(\alpha_1,\alpha_3)=$维 $L(\alpha_4,\alpha_5)$. 又由(7.3.1)式知 $L(\alpha_4,\alpha_5)\subseteq L(\alpha_1,\alpha_3)$,故 $L(\alpha_4,\alpha_5)=L(\alpha_1,\alpha_3)$.

习　　题　7.3

1. [4.15]试证 R^4 中由向量 $\alpha_1=[1,1,0,0]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,0,1,1]^{\mathrm{T}}$ 生成的子空间与由 $\alpha_3=[2,-1,3,3]^{\mathrm{T}},\alpha_4=[0,1,-1,-1,]^{\mathrm{T}}$ 生成的子空间一致.

2. 假定 $\alpha=[a_1,a_2],\beta=[b_1,b_2]$是线性空间 R^2 中两个非零元,如果 α 生

成的空间 $L(\alpha)$ 与 β 生成的子空间 $L(\beta)$ 一致，试证 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

3. 线性空间 V 中线性无关的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的子空间与由 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 生成的子空间一致．

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是线性空间 V 的两个向量组，证明

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)+L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_t,\beta_1,\cdots,\beta_s).$$

§7.4　过渡矩阵的求法

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，由于后者是 V 中 n 个向量，它们可用基向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合表示．设

$$\begin{aligned}
\beta_1&=p_{11}\alpha_1+p_{21}\alpha_2+\cdots+p_{n1}\alpha_n,\\
\beta_2&=p_{12}\alpha_1+p_{22}\alpha_2+\cdots+p_{n2}\alpha_n,\\
&\cdots,\\
\beta_n&=p_{1n}\alpha_1+p_{2n}\alpha_2+\cdots+p_{nn}\alpha_n.
\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

上述等式用矩阵表示就是

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_2,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P.$$

注意，这里的 P 是(7.4.1)式中系数矩阵的转置矩阵，即以组合系数为列向量(不是为行向量)的矩阵：

$$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}.$$

矩阵 P 称为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵，其求法有如下几种：

求法一　根据定义求之.

给出的两组基，如果其中一组由另一组线性表出的关系易求出，那么直接写出以这些组合系数为列向量的矩阵即为所求的过

渡矩阵．

例 1 在 3 维线性空间 V_3 中求基 e_1,e_2,e_3 到基 $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3$ 的过渡矩阵，其中

$$e_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}},\quad e_2=[1,1,-1]^{\mathrm{T}},\quad e_3=[1,-1,1]^{\mathrm{T}};$$

$$\tilde{e}_1=[3,0,1]^{\mathrm{T}},\quad \tilde{e}_2=[2,0,0]^{\mathrm{T}},\quad \tilde{e}_3=[0,2,-2]^{\mathrm{T}}.$$

解法一 观察向量分量之间的关系，易看出 $\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3$ 可用 e_1,e_2,e_3 线性表出：

$$\tilde{e}_1=e_1+e_2+e_3,\tilde{e}_2=0e_1+e_2+e_3,\tilde{e}_3=0e_1+e_2+e_3.$$

以这些组合系数为列向量的矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

即为所求的过渡矩阵．

解法二 由 $[\tilde{e}_1,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3]=[e_1,e_2,e_3]P$，得到

$$\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}P,$$

则 $$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\1/2&0&-1/2\\-1/2&-1&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&2&0\\0&0&2\\1&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}.$$

例 2[1993 年 2] 已知 R^3 的两组基为

$$\alpha_1=[1,1,1]^{\mathrm{T}},\quad \alpha_2=[1,0,-1]^{\mathrm{T}},\quad \alpha_3=[1,0,1]^{\mathrm{T}};$$

$$\beta_1=[1,2,1]^{\mathrm{T}},\quad \beta_2=[2,3,4]^{\mathrm{T}},\quad \beta_3=[3,4,3]^{\mathrm{T}}.$$

求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_2 的过渡矩阵．

解 设所求过渡矩阵为 P，则 $[\beta_1,\beta_2,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P$，于是

$$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}[\beta_2,\beta_2,\beta_3]$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\1/2 & 0 & -1/2\\1/2 & -1 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 4\\1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\0 & -1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

例 3 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的基，又 V 中向量 α_{n+1} 关于这组基的坐标为 $[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，且 $\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n+1}$ 也是 V 的一组基，试写出由前一组基到后一组基的过渡矩阵.

解 后一组基的每个向量可写成前一组基的线性组合：

$$\alpha_2=0\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3+\cdots+0\alpha_{n-1}+0\alpha_n,$$

$$\alpha_3=0\alpha_1+0\alpha_2+\alpha_3+\cdots+0\alpha_{n-1}+0\alpha_n,$$

$$\cdots$$

$$\alpha_n=0\alpha_1+0\alpha_2+0\alpha_3+\cdots+0\alpha_{n-1}+\alpha_n,$$

$$\alpha_{n+1}=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+\cdots+x_{n-1}\alpha_{n-1}+x_n\alpha_n.$$

故 $[\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{n+1}]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$，其中过渡矩阵 P 为

$$P=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & x_1\\1 & 0 & \cdots & 0 & x_2\\0 & 1 & \cdots & 0 & x_3\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & \cdots & 0 & x_{n-1}\\0 & 0 & \cdots & 1 & x_n\end{bmatrix}.\text{（解毕）}$$

当两组基的线性关系不易看出时，可用下述各法求其过渡矩阵.

求法二 中介法.

取线性空间 V 的一组标准基作中介，且称其为中介基. 分别

求出由中介基到所给两组基的过渡矩阵，再通过与中介基(标准基)的中介作用，求出所要求的过渡矩阵．

例 4 给定 3 维线性空间 V 的两组基

$\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[2,1,0]^T,\alpha_3=[1,1,1]^T$；

$\beta_1=[1,2,-1]^T,\beta_2=[2,2,-1]^T,\beta_3=[2,-1,-1]^T$.

写出由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_2,β_3,β_3 的过渡矩阵．

解 取标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，则 $\alpha_1=1\cdot\varepsilon_1+0\cdot\varepsilon_2+1\cdot\varepsilon_3$，

$\alpha_2=2\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+0\cdot\varepsilon_3,\alpha_3=1\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+1\cdot\varepsilon_3$，

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \tag{7.4.2}$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]A. \tag{7.4.3}$$

同法可得

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{bmatrix} \tag{7.4.4}$$

$$=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]B. \tag{7.4.5}$$

其中 A、B 分别为(7.4.2)与(7.4.4)式最右端矩阵．由(7.4.3)式得到$[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A^{-1}$，将此代入(7.4.5)式得到

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A^{-1}B,$$

故所求的过渡矩阵为 $A^{-1}B=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}-4&-3&3\\2&3&3\\2&1&-5\end{bmatrix}$.

求法三 初等变换法．

设 $\alpha_i=[a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}]^T,\beta_i=[b_{1i},b_{2i},\cdots,b_{ni}]^T,i=1,2,\cdots,n$，为 n 维线性空间 V 的两组基．令 $A=[a_{ij}]_{n\times n},B=[b_{ij}]_{n\times n}$，又设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$ 的过渡矩阵为 P，则$[\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$，即 $B=AP$. 解矩阵方程 $AX=B$，可求出过渡矩阵 $P=X=A^{-1}B$. 常用初等行变换求之．

$$[A \vdots B] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}} [E \vdots A^{-1}B] = [E \vdots P]$$（详见§4.8）.

例 5　3 维线性空间 R^3 中，取两组基

$$\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[1,1,0]^T,\alpha_3=[0,1,1]^T;$$

$$\beta_2=[1,0,3]^T,\beta_2=[2,2,2]^T,\beta_2=[-1,1,4]^T.$$

试求由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵．

解　设 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_2]=A,[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=B$，所求的过渡矩阵为 P，则 $[\beta_1,\beta_1,\beta_2]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]P$，即 $B=AP$，解 $AX=B$ 即可求出 $P=X=A^{-1}B$，用初等行变换解之，得到

$$[A \vdots B] \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] = [E \vdots A^{-1}B],$$

故所求的过渡矩阵为　$P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

求法四　解方程组法．

当基向量是两组矩阵时，欲求非标准基到另一组基的过渡矩阵 $P=[p_{ij}]$ 时，可用解方程组的方法求出．即将矩阵方程

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$$

写成分量方程，解关于 p_{ij} 的方程组，即可求出 P.

例 6　由 2 阶矩阵形成的线性空间 V，其两组基为

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_x=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_y=\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\sigma}_z=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

与

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

试写出由前组基到后组基的过渡矩阵．

解法一 设$[\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}]=[\boldsymbol{I},\boldsymbol{\sigma}_x,\boldsymbol{\sigma}_y,\boldsymbol{\sigma}_z]P$，其中$P=[p_{ij}]$，则$E_{11}=p_{11}I+p_{21}\boldsymbol{\sigma}_x+p_{31}\boldsymbol{\sigma}_y+p_{41}\boldsymbol{\sigma}_z$，即

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=p_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+p_{21}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+p_{31}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}+p_{41}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

解之，得到$p_{11}=p_{41}=1/2$，$p_{21}=p_{31}=0$. 同法可得

$$\begin{array}{llll}p_{12}=0, & p_{22}=1/2, & p_{32}=i/2, & p_{42}=0,\\ p_{13}=0, & p_{23}=1/2, & p_{33}=(-i)/2, & p_{43}=0,\\ p_{14}=1/2, & p_{24}=0, & p_{34}=0, & p_{44}=(-1)/2,\end{array}$$

故所求的过渡矩阵为

$$P=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&i&-i&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

解法二 因$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$为一组标准基，易求出基$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$到基$\boldsymbol{I},\boldsymbol{\sigma}_x,\boldsymbol{\sigma}_y,\boldsymbol{\sigma}_z$的过渡矩阵．显然

$$[\boldsymbol{I},\boldsymbol{\sigma}_x,\boldsymbol{\sigma}_y,\boldsymbol{\sigma}_z]=[\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}]\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-i&0\\0&1&i&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

求出等式最右端矩阵的逆阵，即为所求的过渡矩阵

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-i&0\\0&1&i&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&i&-i&0\\1&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

求法五 通过坐标变换公式求之(参阅§7.5).

已知坐标变换公式时，可求两组基的过渡矩阵．

事实上，设α在两组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$及$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$下的坐标分别为$[x_1,x_2,\cdots,x_n]$与$[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，由$[y_1,\cdots,y_n]=[x_1,\cdots,x_n](P^{-1})^{\mathrm{T}}$，得到$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$(详见§7.5)，则$P$即为所求的过渡矩阵．

例 7 设$[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$为向量$\alpha$在基

$$\boldsymbol{e}_1=[1,0,0,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=[0,2,1,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{e}_3=[0,0,1,1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_4=[0,0,2,1]^{\mathrm{T}},$$

下的坐标，$[\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4]^{\mathrm{T}}$是$\alpha$在基$\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3,\tilde{\boldsymbol{e}}_4$下的坐标，且

$$\tilde{x}_1=x_1,\tilde{x}_2=x_2-x_1,\tilde{x}_3=x_3-x_2,\tilde{x}_4=x_4-x_3.$$

求基$\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3,\tilde{\boldsymbol{e}}_4$.

解 设$[\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3,\tilde{\boldsymbol{e}}_4]=[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4]P$. $\quad(7.4.6)$

如能求出P，则$\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\tilde{\boldsymbol{e}}_2,\tilde{\boldsymbol{e}}_3,\tilde{\boldsymbol{e}}_4$即可求出．由题设，得到

$$[\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\tilde{x}_4]=[x_1,x_2,x_3,x_4]\begin{bmatrix}1&-1&0&\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

由(7.5.1)式知，过渡矩阵为

$$P=\left(\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix};$$

由(7.4.6)式知，所求基为

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_1=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}},\tilde{\boldsymbol{e}}_3=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=[0,0,3,2]^{\mathrm{T}},$$
$$\tilde{\boldsymbol{e}}_2=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4=[0,2,4,2]^{\mathrm{T}},\qquad\tilde{\boldsymbol{e}}_4=\boldsymbol{e}_4=[0,0,2,1]^{\mathrm{T}}.$$

习　题　7.4

1. 在 3 维线性空间V_3中已知基$\varepsilon_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\varepsilon_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$和另一组基$\boldsymbol{e}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_3=[1,1,1]^{\mathrm{T}}$，求由第一组基到第二组基的过渡矩阵，和由第二组基到第一组基的过渡矩阵．

2. 在 2 阶矩阵所形成的线性空间V中，已知两组基：

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$e_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad e_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$g_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},\qquad g_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},$$

$$g_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\qquad g_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

试分别求出从基 g_1,g_2,g_3,g_4 到基 e_1,e_2,e_3,e_4 和从基 e_1,e_2,e_3,e_4 到基 g_1,g_2,g_3,g_4 的过渡矩阵.

3. 设 n 维线性空间 V 的坐标变换为

$$\tilde{x}_1=x_1,\qquad \tilde{x}_2=x_2-x_1,$$
$$\tilde{x}_3=x_3-x_2,\cdots,\qquad \tilde{x}_n=x_n-x_{n-1},$$

试求 V 的基变换公式.

§7.5 坐标的求法

定义 7.5.1 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V_n 的一组基(底). 于是对任何元素 $\alpha\in V_n$, α 总可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的线性组合. 设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$, 其中组合系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是被向量 α 及一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 唯一确定. 这组有序数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 就称为 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标,并记作

$$\alpha=[x_1,x_2,\cdots,x_n].$$

值得注意的是,线性空间中元素的坐标是对给定基而言的. 相同元素在两组不同基下的坐标一般是不同的.

下面给出元素的坐标的求法.

求法一 解方程组法.

由上述定义可知,为求元素 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标,只须求出 α 由基线性表出的组合系数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 当 $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的分量已知时,常用解方程组的方法求出.

例 1[6.5] 在 R^3 中求向量 $\alpha=[3,7,1]$在基

$$\alpha_1=[1,3,5],\alpha_2,=[6,3,2],\alpha_3=[3,1,0]$$

下的坐标.

解 因 $\alpha\in R^3$，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 又为 R^3 的一组基，故

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3,$$

即 $[3,7,1]=x_1[1,3,5]+x_2[6,3,2]+x_3[3,1,0]$.

因而 $\begin{cases}x_1+6x_2+3x_3=3,\\3x_1+3x_2+x_3=7,\\5x_1+2x_2+0x_3=1.\end{cases}$ 解之得 $x_1=33,x_2=-82,x_3=154$.

即 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $[33,-82,154]$.

求法二 初等变换法.

例 2[1987 年 1] 已知三维向量空间的基底为

$$\alpha_1=[1,1,0],\alpha_2=[1,0,1],\alpha_3=[0,1,1].$$

则向量 $\beta=[2,0,0]$ 在此基底下的坐标是____.

解法一 令 $A=[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\beta^T]$. 对 A 进行初等行变换，将其化为含最高阶单位矩阵的矩阵，得到

$$A\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}.$$

由命题 3.2.1 知 $\beta^T=\alpha_1^T+\alpha_2^T-\alpha_3^T$，即 $\beta=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，故所求坐标为 $[1,1,-1]$.

解法二 用初等列变换将 $B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\beta\end{bmatrix}$ 化成含最高阶单位矩阵的矩阵

$$B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\2&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2-c_1}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\0&1&1\\2&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_3+c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&1&2\\2&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_3(1/2)\\c_2(-1)}]{c_1+c_2}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&-1&1\\0&2&-1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2-c_3]{c_1+c_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma\end{bmatrix}$$

显然有 $\gamma=1\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2-\varepsilon_3$. 由命题 3.7.1 知 $\beta=1\cdot\alpha_1+1\cdot\alpha_2+(-1)\alpha_3$，即所求坐标为$[1,1,-1]$.

求法三 应用基变换与坐标变换的关系求之.

先简单介绍基变换与坐标变换的关系及其记忆方法.

设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 n 维线性空间 V 的两组基，用矩阵形式将(7.4.1)式记为

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n;\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 均为 n 维列向量

将上式求转置，得到 $\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\\beta_2^{\mathrm T}\\\cdots\\\beta_n^{\mathrm T}\end{bmatrix}=P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\\\alpha_2^{\mathrm T}\\\cdots\\\alpha_n^{\mathrm T}\end{bmatrix}$.

设 $\alpha\in V$，它在这两组基下的坐标分别为$[x_1,x_2,\cdots,x_n]$与$[y_1,y_2,\cdots,y_n]$. 坐标变换与基变换的关系有如下四种不同写法：

$$[\beta_1\cdots\beta_2]=[\alpha_1\cdots\alpha_n]P\leftrightarrow[y_1\cdots y_n]=[x_1\cdots x_n](P^{\mathrm T})^{-1}\quad(7.5.1)$$

$$[\beta_1\cdots\beta_2]=[\alpha_1\cdots\alpha_n]P\leftrightarrow\begin{bmatrix}y_1\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{bmatrix},\quad(7.5.2)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm T}\\\cdots\\\beta_n^{\mathrm T}\end{bmatrix}=P^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm T}\\\cdots\\\alpha_n^{\mathrm T}\end{bmatrix}\leftrightarrow\begin{bmatrix}y_1\\\cdots\\y_n\end{bmatrix}=[(P^{\mathrm T})^{\mathrm T}]^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\\cdots\\x_n\end{bmatrix},\quad(7.5.3)$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \beta_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots\\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\leftrightarrow[y_1\cdots y_n]=[x_1\cdots x_n](P^{\mathrm{T}})^{-1}. \tag{7.5.4}$$

由上述各式不难看出，当基向量与向量在此基上的坐标分别都在两式左端，且都记为行(或列)向量时，两个基之间的过渡矩阵与两个坐标之间的过渡矩阵是互为转置求逆关系，例如(7.5.1)式中 P 与$(P^{\mathrm{T}})^{-1}$;(7.5.3)式中 P^{T} 与$[(P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}]^{-1}$的关系.

当基向量与向量在此基上的坐标分别都在两式左端，但一个记为行(列)向量，另一个记为列(行)向量时，两个基之间的过渡矩阵与两个坐标之间的过渡矩阵是互为求逆关系，例如(7.5.2)式中 P 与 P^{-1}的关系;(7.5.4)式中 P^{T} 与$(P^{\mathrm{T}})^{-1}$的关系．这是不难理解的，事实上，行(列)向量与列(行)向量已有转置关系，因此，过渡矩阵仅是互为求逆关系.

用上述变换关系求向量坐标，主要用在下述三个问题上.

问题一　给出两组基，又已知一向量在其中一组基下的坐标，求该向量在另一组基下的坐标.

这类问题比较容易解决．给出两组基即可求出过渡矩阵，又已知一向量在其中一组基下的坐标，代入上述任一坐标变换公式，即可求出该向量在另一组基下的坐标.

例 3　若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ 也是 V 的一组基，又若 α 关于前一组基的坐标为$[n,n-1,\cdots,2,1]$，求 α 关于后一组基的坐标.

解法一　易求得前组基到后组基的过渡矩阵 P:

$$[\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n]$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1&1&\cdots&1\\0&0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}.$$

其中上式最右端矩阵为 P. 又设 α 关于后一组基的坐标为 $[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，由(7.5.1)式得到

$$[y_1,y_2,\cdots,y_n]=[n,n-1,\cdots,2,1](P^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$=[n,n-1,\cdots,2,1]\begin{bmatrix}1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

故 $y_1=n-(n-1)=1,\qquad y_2=(n-1)-(n-2)=1,$

$\cdots,\qquad y_{n-1}=2-1=1,\qquad y_n=1.$

解法二 设 $\alpha=y_1\alpha_1+y_2(\alpha_1+\alpha_2)\cdots+y_n(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)$. 由题设，$\alpha=n\alpha_1+(n-1)\alpha_2+\cdots+2\alpha_{n-1}+\alpha_n$，比较对应坐标得

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=n,\ y_2+\cdots+y_n=n-1,$$
$$\cdots,\ y_{n-1}+y_n=2,\ y_n=1.$$

解之，得到 $y_1=y_2=\cdots=y_{n-1}=y_n=1$.

问题二 给出一组基向量及一向量的分量，求该向量在给定基下的坐标.

值得注意的是所给向量的分量可看成该向量在标准基下的坐标. 于是问题二实质上就是给出两组基，其中一组是标准基，且已知一向量在标准基下的坐标，求该向量在另一组基下的坐标. 因而问题二是问题一的特殊情况.

设 $\beta_i=[p_{1i},p_{2i},\cdots,p_{ni}]\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为 R^n 的一组基，向量 $\alpha=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$，则

$$\beta_i=p_{1i}\varepsilon_1+p_{2i}\varepsilon_2+\cdots+p_{ni}\varepsilon_n\quad(i=1,2,\cdots,n),$$
$$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n\ (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n\text{ 为标准基}).$$

设向量 α 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 下的坐标为 $[y_1,y_2,\cdots,y_n]$，由 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n]P$，其中 $P=[p_{ij}]_{n\times n}$，和(7.5.1)式得到

$$[y_1,y_2,\cdots,y_n]=[x_1,x_2,\cdots,x_n](P^{\mathrm{T}})^{-1}.$$

例 4 已知三维线性空间 $V=R^3$ 的一组基为

$$\beta_1=[1,1,0]^{\mathrm{T}},\beta_2=[0,0,2]^{\mathrm{T}},\beta_3=[0,3,2]^{\mathrm{T}}.$$

求向量 $\alpha=[5,8,-2]^{\mathrm{T}}$ 关于基 $\beta_1,\beta_2,,\beta_3$ 下的坐标.

解法一 取 V 的一组标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,由题意得到

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&3\\0&2&2\end{bmatrix}.$$

设上等式最右端矩阵为 P,α 在基 β_1,β_2,β_1 下的坐标为$[y_1,y_2,y_3]^{\mathrm{T}}$. 因 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标为$(5,8,-2)^{\mathrm{T}}$,由(7.5.1)式得到

$$[y_1,y_2,y_3]=[5,8,-2](P^{\mathrm{T}})^{-1}=[5,-2,1].$$

解法二 由$[\beta_1,\beta_2,\beta_2]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P$ 及(7.5.2)式得到

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=P^{-1}\begin{bmatrix}5\\8\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1/3&-1/3&1/2\\-1/3&1/3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\8\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

解法三 由 $\begin{bmatrix}\beta_1{}^{\mathrm{T}}\\\beta_2{}^{\mathrm{T}}\\\beta_3{}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}$ 及(7.5.3)式得到

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&3&2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\begin{bmatrix}5\\8\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

解法四 由 $\begin{bmatrix}\beta_1{}^{\mathrm{T}}\\\beta_2{}^{\mathrm{T}}\\\beta_1{}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{bmatrix}$ 及(7.5.4)式得到

$$[y_1,y_2,y_3]=[5,8,-2]\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&2\\0&3&2\end{bmatrix}^{-1}=[5,-2,1].$$

解法五 设 $\alpha=k_1\beta_1+k_2\beta_3+k_3\beta_2$,改写成分量方程组,得到

$$k_1=5,\qquad k_1+3k_3=8,\qquad 2k_2+2k_3=-2,$$

解之得到 $k_1=5,k_2=-2,k_3=1$,即 α 在 β_1,β_2,β_3 下的坐标为$[5,-2,1]$.

问题三 求在两组基下坐标相等的非零向量.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 n 维线性空间 V 的两组基，且 $[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]P$；又设非零向量 α 在这两组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$，由(7.5.2)式得到 $\boldsymbol{Y}=P^{-1}\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{X}=P^{-1}\boldsymbol{X}$. 解 $(P-E)X=\boldsymbol{0}$，可求出所求的非零向量.

例 5 在实数域上的 2 阶矩阵构成的线性空间中，(1)求基底

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix};$$

到基底

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{bmatrix}2&1\\-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_2=\begin{bmatrix}0&3\\1&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_3=\begin{bmatrix}5&3\\2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_4=\begin{bmatrix}6&6\\1&3\end{bmatrix},$$

的过渡矩阵；

(2)分别求向量 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 在基底 $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4$ 与 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4$ 下的坐标；

(3)求一非零向量 $\boldsymbol{A}$，使 $\boldsymbol{A}$ 在上述两个基底下坐标相等.

解 (1)将后一组基写成前一组基的线性组合：

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_1=2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,\\ \boldsymbol{F}_2=\qquad 3\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3,\\ \boldsymbol{F}_3=5\boldsymbol{E}_1+3\boldsymbol{E}_2+2\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,\\ \boldsymbol{F}_4=6\boldsymbol{E}_1+6\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+3\boldsymbol{E}_4,\end{cases}\tag{7.5.5}$$

故
$$[\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3,\boldsymbol{F}_4]=[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_4]\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix},\tag{7.5.6}$$

于是所求的过渡矩阵为上式最右边的矩阵，设为 B.

(2) **解法一** 因 $M=a_{11}\boldsymbol{E}_1+a_{12}\boldsymbol{E}_2+a_{21}\boldsymbol{E}_3+a_{22}\boldsymbol{E}_4$, (7.5.7)
故 M 在前一组基下的坐标为$[a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}]$. 设 M 在后一组基下的坐标为$[y_1,y_2,y_3,y_4]$,由(7.5.1)式得到

$$[y_1,y_2,y_3,y_4]=[a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}](B^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$$=[a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}]\begin{bmatrix}4/9 & 1/27 & 1/3 & -7/27\\ 1/3 & 4/9 & 0 & -1/9\\ -1 & -1/3 & 0 & 1/3\\ -11/9 & -23/27 & -2/3 & 26/27\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}=[&(4/9)a_{11}+(1/3)a_{12}-a_{21}-(11/9)a_{22},\\ &(1/27)a_{11}+(4/9)a_{12}-(1/3)a_{21}-(23/27)a_{22},\\ &(1/3)a_{11}-(2/3)a_{22},\\ &(-7/27)a_{11}-(1/9)a_{12}+(1/3)a_{21}+(26/27)a_{22}].\end{aligned}$$

(2) **解法二** 将解法一中$(B^{\mathrm{T}})^{-1}$转置,即得 B^{-1}. 由(7.5.6)式即得

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1=(4/9)\boldsymbol{F}_1+(1/27)\boldsymbol{F}_2+(1/3)\boldsymbol{F}_3-(7/27)\boldsymbol{F}_4,\\ \boldsymbol{E}_2=(1/3)\boldsymbol{F}_1+(4/9)\boldsymbol{F}_2-(1/9)\boldsymbol{F}_4,\\ \boldsymbol{E}_3=-\boldsymbol{F}_1-(1/3)\boldsymbol{F}_2+(1/3)\boldsymbol{F}_4,\\ \boldsymbol{E}_4=-(11/9)\boldsymbol{F}_1-(23/27)\boldsymbol{F}_2-(2/3)\boldsymbol{F}_3+(26/27)\boldsymbol{F}_4.\end{cases}\qquad(7.5.8)$$

代入(7.5.7)式,得到

$$\begin{aligned}M=&[(4/9)a_{11}+(1/3)a_{12}-a_{21}-(11/9)a_{22}]\boldsymbol{F}_1\\ &+[(1/27)a_{11}+(4/9)a_{12}-(1/3)a_{21}-(23/27)a_{22}]\boldsymbol{F}_2\\ &+[(1/3)a_{11}-(2/3)a_{22}]\boldsymbol{F}_3+[(-7/27)a_{11}\\ &-(1/9)a_{12}+(1/3)a_{21}+(26/27)a_{22}]\boldsymbol{F}_4.\end{aligned}\qquad(7.5.9)$$

与解法一所得结果相同.

(3)**解法一** 设非零向量 A 在前一组基和后一组基下的坐标分别为 $\boldsymbol{X}=[x_1,x_2,x_3,x_4]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{Y}=[y_1,y_2,y_3,y_4]^{\mathrm{T}}$,由(7.5.6)式得到 $\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{-1}$,即 $\boldsymbol{Y}=B^{-1}\boldsymbol{X}$.

令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}$,则$(B-E)\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,解之可得 $\boldsymbol{X}$. 由

$$B-E=\begin{bmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

故其解为 $X=k[-1,-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$,其中 k 为任意常数．于是所求向量 A 为

$$\begin{aligned}A&=k[(-1)E_1+(-1)E_2+(-1)E_3+E_4]\\&=k[(-1)F_1+(-1)F_2+(-1)F_3+F_4]\\&=k\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}(k\text{ 为任意非零常数}).\end{aligned}$$

(3) **解法二** 因任意向量 $\boldsymbol{M}$ 在前一组基和后一基下的坐标由(7.5.7)和(7.5.9)式给出,令对应坐标相等,求出 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$即可求出非零向量 A. 事实上,解

$$\begin{cases}a_{11}=\quad(4/9)a_{11}+(1/3)a_{12}-a_{21}-(11/9)a_{22};\\a_{12}=\quad(1/27)a_{11}+(4/9)a_{12}-(1/3)a_{21}-(23/27)a_{22};\\a_{21}=\quad(1/3)a_{11}\qquad\qquad\qquad\qquad-(2/3)a_{22};\\a_{22}=(-7/27)a_{11}-(1/9)a_{12}+(1/3)a_{21}+(26/27)a_{22},\end{cases}$$

得到 $a_{11}=-a_{22},a_{12}=-a_{22},a_{21}=-a_{22}(a_{22}\neq0)$,所求非零向量为

$$A=(-a_{22})\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}(a_{22}\neq0).\text{ 解毕.}$$

注意 上述(3)的两个解法中前者避免求 B^{-1},而后者须由(7.5.5)求得(7.5.8)式,必须求 B^{-1},因而解法一较解法二为优．

习　题　7.5

1. 已知 3 维线性空间 V 的一组基为

$$\alpha_1=[1,1,0],\qquad \alpha_2=[1,0,1],\qquad \alpha_3=[0,1,1].$$

求向量 $\alpha=[2,0,0]$在上述基下的坐标．

2. 设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是线性空间 R^3 的一组基,求向量 $\alpha=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 在 R^3 的另一组基 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 下的坐标．

3. [6.7]在四维向量空间 R^4 中,已知两组基

$$\begin{cases}\alpha_1=[1,0,0,0],\\ \alpha_2=[0,1,0,0],\\ \alpha_3=[0,0,1,0],\\ \alpha_4=[0,0,0,1];\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_1=[2,1,-1,1],\\ \beta_2=[0,3,1,0],\\ \beta_3=[5,3,2,1],\\ \beta_4=[6,6,1,3].\end{cases}$$

(1) 求由前组基到后组基的过渡矩阵；

(2) 求向量 $\alpha=[x_1,x_2,x_3,x_4]$对后组基的坐标；

(3) 求对两组基有相同坐标的非零向量．

§7.6 线性变换的矩阵求法

求线性变换的矩阵，常见的有四种类型．类型不同，求法也不同，下面分别说明．

类型Ⅰ 线性变换 T 由一组基或其线性组合象给出，T 在这组基下的矩阵按定义求出．为此只须将基的象表成基的线性组合．

例1 设 V_3 是实数域 R 上的3维线性空间，

$$T(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},T(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},T(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是 V_3 的一组基，T 为 V_3 上的线性变换，试求 T 关于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的矩阵．

解 T 为线性变换，由题设，得到

$$T(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j},T(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=T(\boldsymbol{j})+T(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},$$

$$T(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=T(\boldsymbol{i})+T(\boldsymbol{j})+T(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

因而 $T(\boldsymbol{i})=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{k},T(\boldsymbol{j})=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},T(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}$.

写成矩阵形式，有

$$T(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=[\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\\-2&1&0\end{bmatrix}.$$

上式最右边矩阵为所求矩阵．

类型Ⅱ 线性变换 T 由一组基的象给出，但基及其象都用分

量表示，T 对于这组基的矩阵，仍按定义求出．这时将基的象表成基的线性组合的方法较多，常用的有视察法；解方程组法；矩阵求逆法；矩阵相似法等．

例 2 已知线性空间 R^3 的线性变换 σ，把基

$$\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[0,1,0]^T,\alpha_3=[0,0,1]^T$$

分别变为

$$\beta_1=[1,0,2]^T,\beta_2=[-1,2,-1]^T,\beta_3=[1,0,0]^T.$$

试求 σ 关于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的矩阵．

解法一 可用视察法将基象组 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3)$ 分别写成基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．事实上

$$\sigma(\alpha_1)=\beta_1=[1,0,2]^T=\alpha_1+\alpha_3,$$

$$\sigma(\alpha_2)=\beta_2=[-1,2,-1]^T=-\alpha_1+2\alpha_2,$$

$$\sigma(\alpha_3)=\beta_2=[1,0,0]^T=\alpha_1-\alpha_3,$$

$$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix},\tag{7.6.1}$$

故 σ 关于基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的矩阵为上式右端数字矩阵．

解法二 用视察不能将基的象表成基的线性组合时，常用解方程组法求出，为此，设

$$\sigma(\alpha_1)=\beta_1=x_{11}\alpha_1+x_{21}\alpha_2+x_{31}\alpha_3,$$

$$\sigma(\alpha_2)=\beta_2=x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2+x_{32}\alpha_3,$$

$$\sigma(\alpha_3)=\beta_3=x_{13}\alpha_1+x_{23}\alpha_2+x_{33}\alpha_3.$$

将 α_i 与 β_j 的分量代入上式，得分量方程组，解之得到

$$x_{11}=x_{13}=x_{31}=1,\qquad x_{12}=x_{33}=-1,$$

$$x_{21}=x_{23}=x_{32}=0,\qquad x_{22}=2,$$

故 $$\sigma[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1&-1&1\\0&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}.$$

解法三 由 $[\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3)]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]A$ 得到

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}A. \tag{7.6.2}$$

两端左乘右端初等矩阵的逆矩阵，得

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

注意 像解法三那样以向量为列向量构成矩阵[参阅(7.6.2)式]求过渡矩阵的方法仅在向量以分量形式给出的情况下使用，因而在 R^n 中一定可以使用.

解法四 设由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到 $\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3)$的过渡矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix},$$

由解法三中(7.6.2)式得到

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\0 & 2 & 0\\2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3\end{bmatrix}.$$

比较两端矩阵中的对应元素，得到

$$a_1=a_3=c_1=1,a_2=c_3=-1,b_1=b_3=c_2=0,b_2=2.$$

所求得的 A 与解法三相同.

解法四较解法三为优，这是因为解法四避免求逆，仅用矩阵乘法.

解法五 取 R^3 的一组标准基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，先求出 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵 B，然后求出由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵 P，则所求的矩阵 $A=P^{-1}BP$.

由 $\varepsilon_1=\alpha_1-\alpha_3,\varepsilon_2=\alpha_2,\varepsilon_3=\alpha_3$，得到

$$\sigma(\varepsilon_1)=\sigma(\alpha_1-\alpha_3)=\sigma(\alpha_1)-\sigma(\alpha_3)=[0,0,2]=2\varepsilon_3,$$

$$\sigma(\varepsilon_2)=\sigma(\alpha_2)=[-1,2,-1]=-\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3,$$

$$\sigma(\varepsilon_3)=\sigma(\alpha_3)=[1,0,0]=\varepsilon_1,$$

故 $\sigma[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]B.$

再由 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_2,\alpha_3=\varepsilon_3$，得到

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P.$$

故 $A=P^{-1}BP$ 为(7.6.1)式最右端矩阵.

类型Ⅱ 线性变换 T 由 V 中任意元素的象给出. 将 T 作用于已知基或标准基，并将基象表成该基的线性组合，可求出 T 在该基下的矩阵.

例 3[6.10] 函数集合

$$V_3=\{\alpha=(a_2x^2+a_1x+a_0)e^x\mid a_2,a_1,a_0\in R\}$$

对于函数的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一个基

$$\alpha_1=x^2e_x,\alpha_2=xe^x,\alpha_3=e^x.$$

求微分运算 D 在这个基下的矩阵.

解 显然微分运算 D 为 V_3 上的一个线性变换，将 D 作用于所给的一组基，并将基象表成该基的线性组合，得到

$$D\alpha_1=D(x^2e^x)=2xe^x+x^2e^x=1\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+0\alpha_3,$$

$$D\alpha_2=D(xe^x)=e^x+xe^x=0\alpha_1+1\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3,$$

$$D\alpha_3=D(e^x)=e^x=0\cdot\alpha_1+0\cdot\alpha_2+1\cdot\alpha_3,$$

故 $D(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$

因而 D 在上述基下的矩阵为上式最右边的矩阵.

例 4 在线性空间 $M_2(R)$(参阅§7.1 例 5)中定义变换

$$\sigma(X)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\quad[\forall\ X\in M_2(R)],$$

(1) 试证 σ 是线性变换；

(2) 写出 $M_2(R)$ 的一组基，并求 σ 在这组基下的矩阵．

解 (1)易知 σ 是 $M_2(R)$ 的一个变换．任取 $X,Y\in M_2(R)$，a，$b\in R$，由矩阵运算性质得到

$$\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}(a\boldsymbol{X}+b\boldsymbol{Y})\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$$
$$=a\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{Y}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix},$$

即 $\sigma(aX+bY)=a\sigma(X)+b\sigma(Y)$，故 σ 是 $M_2(R)$ 的线性变换．

(2)显然 $M_2(R)$ 是实数域上 4 维线性空间，其标准基为

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

因 $$\sigma(\boldsymbol{E}_1)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+2\boldsymbol{E}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{E}_2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$
$$=-\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{E}_3)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix}$$
$$=\boldsymbol{E}_1+2\boldsymbol{E}_2+\boldsymbol{E}_3+2\boldsymbol{E}_4,$$
$$\sigma(\boldsymbol{E}_4)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$
$$=-\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3+\boldsymbol{E}_4,$$

故 $$\sigma(\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_3)=[\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3,\boldsymbol{E}_3]\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\2&1&2&1\\1&-1&1&-1\\2&1&2&1\end{bmatrix}.$$

σ 在标准基下的矩阵为上式最右边矩阵．

例 5 设在 $P[x]_n$ 中，线性变换 T 定义为

$$T[f(x)]=(1/a)[f(x+a)-f(x)],$$

其中 a 为定数，$\forall\ f(x)\in P[x]_n$. 求 T 在下述基下的矩阵：

$$f_0(x)=1,f_1(x)=x,f_2(x)=\frac{x(x-a)}{2!},$$

$$f_3(x)=\frac{x(x-a)(x-2a)}{3!},\cdots,$$

$$f_n(x)=\frac{x(x-a)\cdots[x-(n-1)a]}{n!}.$$

解 T 由 $P[x]_n$ 中任意元素 $f(x)$ 的象给出．为求 T 在上述基下的矩阵，将 T 作用于上述基，且将其象表成该基的线性组合：

$$T[f_0(x)]=T(1)=0,T[f_1(x)]=T(x)=1=f_0(x),$$

$$T[f_2(x)]=T[(1/2!)x(x-a)]=x=f_1(x),$$

$$T[f_3(x)]=\frac{1}{a}[f_3(x+a)-f_3(x)]=\frac{x(x-a)}{2!}=f_2(x),\cdots,$$

$$T[f_n(x)]=\frac{1}{a}\left(\frac{(x+a)(x+a-a)\cdots[x+a-(n-1)a]}{n!}-\frac{x(x-a)\cdots[x-(n-1)a]}{n!}\right)=f_{n-1}(x).$$

写成矩阵形式：

$$T[f_0(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)]$$

$$=[f_0(x),f_1(x),\cdots,f_n(x)]\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$

故所求之矩阵为上式最右端矩阵．

类型Ⅳ 已知线性变换在一组基下的矩阵，求在另一组基下的矩阵．

这矩阵的求法较多，或求出过渡矩阵，根据同一线性变换在不同基下的矩阵相似的结论求之；或由定义求之；或取标准基求之．

例 6 设线性变换 σ 在旧基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

求 σ 在新基 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵．

解法一 易求出由旧基到新基的过渡矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

于是 σ 在新基下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13}\\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

解法二 根据定义求之，为此先将 $\sigma(\alpha_1+\alpha_2),\sigma(\alpha_2),\sigma(\alpha_3)$ 表成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合，然后凑成 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合．

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_1+\alpha_2)&=\sigma\alpha_1+\sigma\alpha_2\\ &=a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+a_{31}\alpha_3+a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3\\ &=(a_{11}+a_{12})(\alpha_1+\alpha_2)+(a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12})\alpha_2\\ &\quad+(a_{31}+a_{32})\alpha_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_2)&=a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+a_{32}\alpha_3\\ &=a_{12}(\alpha_1+\alpha_2)+(a_{22}-a_{12})\alpha_2+a_{32}\alpha_3,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha_3)&=a_{13}\alpha_1+a_{23}\alpha_2+a_{33}\alpha_3\\ &=a_{13}(\alpha_1+\alpha_2)+(a_{23}-a_{13})\alpha_2+a_{33}\alpha_3.\end{aligned}$$

以上述组合系数为列向量的矩阵即为 σ 在 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵，显然它等于解法一中的矩阵 B.

例 7 假定 R^3 中的线性变换 T 把基

$$\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[0,1,0]^T,\alpha_3=[0,0,1]^T,$$

变为基

$$\beta_1=[1,0,2]^T,\beta_2=[-1,2,-1]^T,\beta_3=[1,0,0]^T.$$

试求 T 在下述基下的矩阵：

$\widetilde{\alpha}_1=[1,0,1]^{\mathrm{T}},\widetilde{\alpha}_2=[0,1,0]^{\mathrm{T}},\widetilde{\alpha}_3=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$.

解法一 根据定义求之，设法将 $T(\widetilde{\alpha}_1),T(\widetilde{\alpha}_2),T(\widetilde{\alpha}_3)$ 都表成 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 的线性组合．为此，先将 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出：

$$\widetilde{\alpha}_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\alpha_1-\alpha_3,\widetilde{\alpha}_2=\alpha_2,\widetilde{\alpha}_1=\alpha_3. \tag{7.6.3}$$

在各等式两端用 T 作用之，得到

$$T(\widetilde{\alpha}_1)=T(\alpha_1)-T(\alpha_3)=[1,0,2]^{\mathrm{T}}-[1,0,0]^{\mathrm{T}}=2\widetilde{\alpha}_3,$$

$$T(\widetilde{\alpha}_2)=T(\alpha_2)=[-1,2,-1]^{\mathrm{T}}=-\widetilde{\alpha}_1+2\widetilde{\alpha}_2-\widetilde{\alpha}_3,$$

$$T(\widetilde{\alpha}_3)=T(\alpha_3)=[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\widetilde{\alpha}_1;$$

写成矩阵形式为

$$T(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3)=[\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3]\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

故 T 在 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 下的矩阵为上式最右边矩阵．

解法二 根据同一线性变换在不同基下的矩阵必相似的关系求之．

将 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)$ 写成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合：

$$T(\alpha_1)=[1,0,2]^{\mathrm{T}}=\alpha_1+\alpha_3,$$

$$T(\alpha_2)=[-1,2,-1]^{\mathrm{T}}=-\alpha_1+2\alpha_2,$$

$$T(\alpha_3)=[1,0,0]^{\mathrm{T}}=\alpha_1-\alpha_3,$$

故 T 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

由(7.6.3)式有 $$[\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

因而由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 的过渡矩阵 P 为右端数字矩阵，故线性变换 T 在基 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

解法三 取标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,将所有基向量及其象都用$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的线性组合表示,写成矩阵形式得到

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{7.6.4}$$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}, \tag{7.6.5}$$

$$[\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{7.6.6}$$

令(7.6.4),(7.6.5),(7.6.6)式最右端矩阵分别为$P_1,P_2,P_3(=E)$,则

$$\begin{aligned}T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=[T(\alpha_1),T(\alpha_2),T(\alpha_3)]\\ &=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=[\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3]P_2.\end{aligned} \tag{7.6.7}$$

将T作用于(7.6.6)式两端,得

$$\begin{aligned}T(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3)&=T(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P_3\\ &=T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3){P_1}^{-1}P_3 && [\text{利用(7.6.4)式}]\\ &=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)P_2{P_1}^{-1}P_3 && [\text{利用(7.6.7)式}]\\ &=[\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3]{P_3}^{-1}P_2{P_1}^{-1}P_3 && [\text{利用(7.6.6)式}]\end{aligned}$$

故T在$\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$下的矩阵为

$${P_3}^{-1}P_2{P_1}^{-1}P_3=EP_2{P_1}^{-1}E=P_2{P_1}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

解法四 取标准基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$,先将$T(\widetilde{\alpha}_1),T(\widetilde{\alpha}_2),T(\widetilde{\alpha}_3)$用$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$的线性组合表示,然后将$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$用基$\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$的线性组合

表出，于是通过 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡，将 $T(\widetilde{\alpha}_1),T(\widetilde{\alpha}_2),T(\widetilde{\alpha}_3)$ 表成基 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 的线性组合.

由(7.6.3),(7.6.7)及(7.6.6)式得到

$$
\begin{aligned}
T(\widetilde{\alpha}_1)&=T(\alpha_1-\alpha_3)=T(\alpha_1)-T(\alpha_3)\\
&=\varepsilon_1+2\varepsilon_3-\varepsilon_1=2\varepsilon_2=2\widetilde{\alpha}_3,\\
T(\widetilde{\alpha}_2)&=T(\alpha_2)=-\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3=-\widetilde{\alpha}_1+2\widetilde{\alpha}_2-\widetilde{\alpha}_3,\\
T(\widetilde{\alpha}_3)&=T(\alpha_3)=\varepsilon_1=\widetilde{\alpha}_1.
\end{aligned}
$$

故所求矩阵与上述诸解相同.

习　　题　7.6

1. 在 $M_2(R)$ 中，设

$$\sigma(X)=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\qquad \forall\, X\in M_2(R).$$

(1)试证 σ 为 $M_2(R)$ 的线性变换；

(2)求 σ 在某一组基下的矩阵.

2. 在4维线性空间中，取基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，线性变换 T 在此基下的矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 5 & -1\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{bmatrix},$$

如果新基取为

(1)$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2,\alpha_4$；

(2)$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$.

分别求出 T 在这两组新基下的矩阵.

3. 在线性空间 $M_2(R)$ 中定义线性变换 T 为

$$T\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},$$

试求 T 在下述一组基下的矩阵

$$E_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\qquad E_2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$E_3=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\qquad E_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}.$$

4.[6.11] 2 阶对称矩阵的全体

$$V_3=\left\{A=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_2&x_3\end{bmatrix}\middle|\, x_1,x_2,x_3\in R\right\}$$

对于矩阵的线性运算构成 3 维线性空间. 在 V_3 中取一组基

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},A_3=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

在 V_3 中定义合同变换

$$T(A)=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$$

求在基 A_1,A_2,A_3 下的矩阵.

习题答案或提示

以下给出的都不是完备的解答，仅作为解题思路，供参考校核．

习 题 1.1

1. $k=2,l=3$ 时，该项带负号；$k=3,l=2$ 时，带正号．

2. $-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$；$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$；$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$．

3. (1)$(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}$．

(2)0(因 j_1,j_2,j_3,j_4,j_5 不能组成 5 元排列)．

4. $15x^4$；$-3x^3$．

5. $D=0$，展开共有 $n!$ 个项，且每项都等于 1，于是 $n!$ 个项中一半带正号，一半带负号．由于正项对应偶排列，负项对应奇排列，奇偶排列各半．

习 题 1.2

1. $(n-1)!$　2. $6(n-3)!$　3. -3　4. 0　5. $\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$．

6. $n\geqslant 3$ 时，$\Delta_n=0$；$n=2$ 时，$\Delta_2=(a_1-a_2)(b_1-b_1)$；$n=1$ 时，$\Delta_1=a_1-b_1$．

习 题 1.3

1. $\lambda^{10}-10^{10}$　　2. $(x^2-b^2)^n$．

习 题 1.4

1. 仿例 5 证明．121 等被 11 整除．

2. 1998，2196，2394，1800 被 18 整除．　3. 仿例 3 证明．

习 题 1.5

1. $D_4=-24$．　2. $D_3=(p+q+r)(q-p)(r-p)(r-q)$．

3. $\Delta_4=(a_1b_2-a_2b_1)(a_1b_3-a_3b_1)(a_1b_4-a_4b_1)$．

$(a_2b_3-a_3b_2)(a_2b_4-a_4b_2)(a_3b_4-a_4b_3)$．

4. $\Delta_3=(b-a)(c-a)(c-b)$(将 Δ_3 的第 1，2，3 列分别乘 a,b,c)．

5. $D_n=\prod\limits_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j)$．

6. 第 i 列乘以 $(x_i-1)/x_i$，将 Δ_n 除以 $\prod\limits_{i=1}^{n}[(x_i-1)/x_i]$，即乘 $\prod\limits_{i=1}^{n}[x_i/(x_i-1)]$，化成第 1 行元素全是 1 的行列式，再仿例 4 解之．

$$\Delta_n=\prod_{i=1}^{n}[x_i/(x_i-1)]\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(x_i-x_j).$$

习 题 1.6

1. $\Delta_n=[\sin(n+1)\alpha]/\sin\alpha$. 2. $D_n=5^{n+1}-4^{n+1}$.

习 题 1.7

1. $D_n=(-1)^n[(a-1)^n-a^n]$. 2. 将第 i 列乘 $-b_i$ 加到第 $n+1$ 列.

习 题 1.8

1. $[(x+a)^n+(x-a)^n]/2$.

2. $x_1x_2\cdots x_n+a(x_1x_2\cdots x_{n-1}+\cdots+x_1x_3\cdots+x_n+x_2x_3\cdots x_n)$.

3. $D_4=x^2y^2$(仿例 2 求之).

习 题 1.9

1. $[1+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i^2/i)]n!$. 2. $[1+(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{y}{a_i-y})]\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j-y)$.

习 题 1.10

1. $\Delta_n=(-1)^{n-1}(1+n)2^{n-2}$. 2. $(-1)^{(n-1)(n+2)/2}$.

习 题 1.11

1. $t=-3$. 2. $\lambda=1$ 或 $\mu=0$. 3. $\lambda=1$ 4. 利用 $|A^*|=|A|^{n-1}$ 证之.

习 题 2.1

1. 解一 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$,则满足 $A^2=O$ 的一切方阵为 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}$,其中 $a^2=-bc,bc<0$.

解二 设 $A=\begin{pmatrix}a & a\\ a & -a\end{pmatrix}$($a$ 为任意数),由命题 2.1.1,$A^2=O$.

习 题 2.2

1. (A),(C)入选.

2. (1)$A^T\cdot(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T=E$. (2)$(A^{-1})\cdot A=E$.

3. $(E+A)(E-A+A^2-\cdots+A^{m-1})=E+A^m=E$.

4. $(E+BA)[E-B(E+AB)^{-1}A]$

$=E+BA-B(E+AB)^{-1}A-BAB(E+AB)^{-1}A$

$=E+BA-B[(E+AB)^{-1}A+AB(E+AB)^{-1}A]$

$=E+BA-B[(E+AB)(E+AB)^{-1}A]=E$.

5. $(A-3E)(A+E)=E,(A+E)^{-1}=A-3E$.

6. $A[(-a_0/a_m)A^{m-1}+(-a_1/a_m)A^{m-2}+\cdots+(-a_{m-1}/a_m)E]=E$.

7. (1)$A^2=-4A$;

(2)$A^2+4A+4E=(A+2E)^2=4E,(A+2E)(A+2E)/4=E$.

8. (C)入选(见例 4).

9. $(A+B)[A^{-1}-A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}]$

$=E-(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}+BA^{-1}-BA^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

$=E+BA^{-1}-(E+BA^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

$=E+BA^{-1}-B(B^{-1}+A^{-1})(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

$=E-BA^{-1}+BA^{-1}=E$.

习 题 2.3

1. $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$.　2. $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1/2&1/2&0&0\\0&0&1/3&0\\0&0&0&1/4\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&-1&3\end{bmatrix}$.

习 题 2.4

1. $A^2-AB=A(A-B)=E$, $A-B=A^{-1}$即 $B=A-A^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}0&1&-1\\0&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&1&1\\0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

2. $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}$.

习 题 2.5

1. (B)入选.　　2. (A)入选.

3. 如特征值 $\lambda=0$,则有 $\alpha\neq\mathbf{0}$,使 $A\alpha=\lambda\alpha=\mathbf{0}$,$AX=\mathbf{0}$ 有非零解,$|A|=0$.与假设矛盾.反之,若$|A|=0$,则 $AX=\mathbf{0}$ 有非零解 α,则 $A\alpha=\mathbf{0}=0\alpha$,故零是 A 的特征值.

习 题 2.6

1. $|A|=1$, $X=A^{-1}e_3=A^{\mathrm{T}}e_3=[a_{31},a_{32},a_{33}]^{\mathrm{T}}=[a_{31},a_{32},-1]^{\mathrm{T}}$.

将$|A|$按第 3 行展开$|A|=a_{31}^2+a_{32}^2+1=1$,故 $a_{31}=a_{32}=0$.

2. $AA^*=|A|E$, $A^2=|A|E$, $AA^*=A^2$, A 可逆, $A=A^*$.

3. $|A|\neq0$　　4. (C)入选.

5. 证明一　若$|A|=0$，设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$，则 $AA^*=AA^{T}=O$ 即

$\alpha_i\alpha_i'=0$，故 $\alpha_i=\mathbf{0}$，因而 $A=O$，与 $A\neq O$ 矛盾．

证明二　设 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \cdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$，$\alpha_i=[a_{i1},\cdots,a_{in}]\neq\mathbf{0}$. $A^*=A^{T}$，故 $a_{ij}=A_{ij}$，则

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+\cdots+a_{in}^2\neq 0.$$

6. $A^*=[A_{ji}]_{4\times4}=[-a_{ji}]_{4\times4}=-A^{T}$. 由 $A^*=A^{T}$，得 $-A^{T}A=|A|E$，即 $|-A^{T}A|=||A|E|$，$(-1)^4|A|^2=|A|^4$，$|A|^2(|A|^2-1)=0$. 又因 $|A|=\sum\limits_{j=1}^{4}a_{1j}A_{1j}=-\sum\limits_{j=1}^{4}a_{1j}^2<0$，$|A|^2-1=0$，$|A|=\pm1$. 而 $|A|<0$，故 $|A|=-1$.

习　题　2.7

1. $A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\4&-2&4\\2&-1&2\end{bmatrix}$，$A^2=2A$，$A^{100}=2^{99}A$. 注意 $\beta\alpha=2$.

2. (1)$A^2=E-2\xi\xi^{T}+\xi(\xi^{T}\xi)\xi^{T}=E-(2-\xi^{T}\xi)\xi\xi^{T}$，

$$A^2=A\leftrightarrow E-(2-\xi^{T}\xi)\xi\xi^{T}=E-\xi\xi^{T}$$
$$\leftrightarrow(1-\xi^{T}\xi)\xi\xi^{T}=0\leftrightarrow 1-\xi^{T}\xi=O(\text{因 }\xi\xi^{T}\neq O).$$

(2)见§2.5 例 3.　　　　3. 见§6.3 例 8.

4. $(A+xy^{T})\left[A^{-1}-\dfrac{A^{-1}xy^{T}A^{-1}}{1+y^{T}A^{-1}x}\right]=E+xy^{T}A^{-1}-x(1+y^{T}A^{-1}x)y^{T}A^{-1}/(1+y^{T}A^{-1}x)=E$.

习　题　2.8

1. $\begin{bmatrix}4&1&2&3\\3&4&1&2\\5&3&5&7\\5&7&5&3\end{bmatrix}$.　　　　2. 仿例 8 证明．

3. $AP=A[P_1,P_2,\cdots,P_n]=[AP_1,AP_2,\cdots,AP_n]$

$$P\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}=[P_1,\cdots,P_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}=[\lambda_1P_1,\cdots,\lambda_nP_n]$$

$[AP_1,\cdots,AP_n]=[\lambda_1P_1,\cdots,\lambda_nP_n]$ $AP_i=\lambda_iP_i(i=1,2,\cdots,n)$.

4. $AX=B\leftrightarrow A[X_1,\cdots,X_p]=[B_1,\cdots,B_p]$

$\leftrightarrow[AX_1,\cdots,AX_p]=[B_1,\cdots,B_p]\leftrightarrow AX_i=B_i(i=1,2,\cdots,p)$.

5. $PA=\begin{pmatrix}P_1\\ \cdots\\ P_n\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}P_1A\\ \cdots\\ P_nA\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1\\ \cdots\\ P_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1P_1\\ \cdots\\ a_nP_n\end{pmatrix}$.

6. $A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$, $D=|A^TA|=|A|^2$. 从而$|A|\neq0$与$D\neq0$等价.

习　题　2.9

1. $A=\begin{bmatrix}O & A_1\\ A_2 & O\end{bmatrix}$, $A_1=-a_n$, $A_2=E_{n-1}$, $A^{-1}=\begin{bmatrix}O & E_{n-1}\\ -a_n^{-1} & O\end{bmatrix}$.

2. $|A|=|A_{11}A_{22}|=|A_{11}|\cdot|A_{22}|$, A 可逆$\leftrightarrow|A|\neq0\leftrightarrow|A_{11}|\neq0$, $|A_{22}|\neq$ $0\leftrightarrow A_{11}$, A_{22}均可逆, $A^{-1}=\begin{bmatrix}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\ O & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$.

3. $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$(用分块求逆法,或用初等行变换法).

4. $M^{-1}=\begin{bmatrix}O_3 & E_3\\ E_3 & M_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-M_{22} & E_3\\ E_3 & O_3\end{bmatrix}$, $M_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

习　题　2.10

1. $(AB-BA)^T=-(AB-BA)$.　2. $(A^*)^T=(A^T)^*=A^*$.

3. 当 $AB=BA$ 时,$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB$;反之,当$(AB)^T=AB$ 时,有 $B^TA^T=AB$,即 $BA=AB$.

4. $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(-A)^{-1}=-A^{-1}$.

5. 如 $AB=BA$,则$(AB)^T=-AB$;反之,如$(AB)^T=-AB$,则 $AB=BA$.

6. $(A^{-1})^T=|A|^{-1}(A^*)^T=-|A|^{-1}A^*=-A^{-1}$.

7. $(P^TAP)^T=-P^TAP$.

8. 唯一性证明见例 13;

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & -4 & 31 & -23\\ -4 & 4 & -19 & 14\\ 31 & -19 & 6 & -6\\ -23 & 14 & -6 & 6\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2 & 31 & -23\\ 2 & 0 & -19 & 14\\ -31 & 19 & 0 & 2\\ 23 & -14 & -2 & 0\end{bmatrix}.$$

9. $(A^*)^T=(A^T)^*=A^*$.

习　题　2.11

1. -6.　2. 6.　3. 108.　4. $k^n a$.　5. (C)入选.　6. 见§5.2 例 9.

习　题　2.12

1. 秩 $A=4$.　2. $k=3$.　3. $a\neq 2bc$.

4. $\lambda\neq 0$，秩$(A)=4$，$\lambda=0$ 时秩$(A)=2$.

5. 解法一 $|A|=(x+2)(x-1)^2$. 当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -2$ 时，秩 $A=3$；当 $x=-2$ 时，秩 $A=2$；$x=1$ 时，秩 $A=1$.

解法二 $A\to\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & x-1 & -(x-1)\\ 0 & 0 & -(x+2)(x-1)\end{pmatrix}$.

习　题　2.13

1. (1)将 B 的第 i 列向量乘以 -1 加到 $A+B$ 的第 i 列.

(2)AB 的行向量为 B 的行向量线性组合.

2. 矩阵 $\alpha\beta^T$ 的任意两行对应成比例(任意 2 阶行列式等于零).

3. $(A+E)(A-E)=O$，秩$(A+E)+$秩$(A-E)\leqslant n$；

秩$(A+E)+$秩$(A-E)\geqslant$秩$(2A)=$秩$(A)=n(|A|\neq 0)$.

4. 秩$(A)=1$(A 中任意两行成比例).　5. (D)入选.

6. 证明一　$AB=O$，秩 $A+$秩 $B\leqslant p$，而秩 $B=p$，秩 $A\leqslant 0$，故秩 $A=0$.

证明二　A 的 p 个行向量 A_i 为 $X^TB=\mathbf{0}$ 的解向量，因秩 $B=p$，故 $X^TB=\mathbf{0}$ 只有零解，从而 $A=O$.

习　题　2.14

1. 利用命题 2.19.1 证之.　2. (D)入选.

3. 对. 秩$(A)+$秩$(B)\leqslant n$，秩$(B)\geqslant 1$.

4. 秩 $A+$秩 $B\leqslant n$，秩 $A=r$，秩 $B\leqslant n-r$. (B)入选.

习　题　2.15

1. (b)入选.　2. Q 可逆，$Q=p_1p_2\cdots p_s$(p_i 是初等矩阵)，$AQ=Ap_1p_2\cdots p_s$，AQ 是 A 经过 S 次初等列变换得到的矩阵，故秩$(AQ)=$秩 A.

3. 仿例 6 证之.　4. $\widetilde{A}_{ij}=E_{ij}A$，$\widetilde{A}_{ij}^{-1}=A^{-1}E_{ij}^{-1}=A^{-1}E_{ij}$.

习　题　3.1

1. 都不正确.　2. 都不一定.　3. 不一定.　4. (B).

5. 设 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，又 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，有

$0=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+\cdots+l_n\alpha_n$($l_1,\cdots,l_n$ 不全为 0)，

则 $\alpha=(k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_n+l_n)\alpha_n$ 表示不唯一.

习　题　3.2

1. $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 或 $\lambda=1$ 时能;$\lambda=-2$ 时不能.

2. $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

3. (1)$c\neq5$;(2)$c=5$,$\alpha=(11/7)\alpha_1+(3/21)\alpha_2$.

4. $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m+k\beta$,则 $k\neq0$. 故 β 能表成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha$ 的线性组合,但不能表成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合. 否则将此线性组合代入上式,得到 α 能写成 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的线性组合.

5. $$A=[\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\beta^T]\to\begin{bmatrix}1&0&-2&b-2\\0&1&1&2\\0&0&0&a-b-2\end{bmatrix}=A_1,$$

$$B=[\beta_1^T,\beta_2^T,\beta_3^T]\to\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&b\\0&0&a-2\end{bmatrix}=B_1$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关,其秩为 2,故秩 $B=$ 秩 $A=$ 秩 $A_1=2=$ 秩 B_1,$a-2=0$ 即 $a=2$. 由 β_3 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出知 $a-b-2=0$ 即 $b=a-2=0$.

习　题　3.3

1. (C)入选.　　　2. 仿例 1 证之.

习　题　3.4

1. 由题设知组(Ⅰ)能由组(Ⅱ)线性表出,因 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{r-1}\alpha_{r-1}+k_r\alpha_r$,由题设知 $k_r\neq0$. 故 $\alpha_r=-(k_1/k_r)\alpha_1-\cdots-(k_{r-1}/k_r)\alpha_{r-1}+(1/k_r)\beta$. 于是组(Ⅱ)能由组(Ⅰ)线性表出.

2. 仿例 10 证明或直接利用此例结论证之.

3. $$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\\\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\\\beta_3=\alpha_1+(2/5)\alpha_2+\alpha_3,\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha_1=-\beta_1+\beta_2+\beta_3,\\\alpha_2=2\beta_1-2\beta_2-\beta_3,\\\alpha_3=2\beta_1-\beta_2-\beta_3.\end{cases}$$

4. 仿例 10 证明.

习　题　3.5

1. 由 $|[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]|=0$ 得到 $a=2b$.

2. 由 $|[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]|\neq0$ 得 $k\neq0,-3$.

3. (C)入选. 4. (B),(D)对.　5. 详见§3.6 例 5.

6. $t\neq-2,3$ 时线性无关,$t=-2,3$ 时线性相关.

7. 充分性 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价．

必要性 β(n 维向量)，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，利用定理 3.3.1 证之．

8. $x_1\alpha+x_1\beta=\mathbf{0}\leftrightarrow\begin{cases}a_1x_1+b_1x_2=0\\a_2x_2+b_2x_2=0\end{cases}$有非零解$\leftrightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}=0$.

9. (A). 10. $A=[\alpha_1,\cdots,\alpha_n]$，$k=[k_1,\cdots,k_n]^{\mathrm{T}}$，$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=\mathbf{0}$，$BAK=B\cdot O$ 即 $EK=K=O$，A 的列向量组线性无关．

11. 设 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关，有不全为 0 的数 $x_1,\cdots,x_r$ 使 $x_1\beta_r+\cdots x_r\beta_r=\mathbf{0}$.

即$\begin{cases}k_{11}x_1+\cdots+k_{r1}x_r=0\\\cdots\cdots\\k_{1r}x_1+\cdots+k_{rr}x_r=0\end{cases}$ 有非零解，秩$(K)<r$.

设秩$(K)<r$，因秩$\begin{pmatrix}\beta_1\\\cdots\\\beta_r\end{pmatrix}\leqslant$秩$(K)<r$，故 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性相关．

习 题 3.6

1. $|K|=1$. 2. $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=\mathbf{0}$ 线性相关．

3. (C)入选，$|K|=2\neq0$，(A)，(B)，(D)中 $|K|=0$.

4. 利用法二证之 $|B|=|K|\neq0$. 5. $k\neq1$ 时，$|K|\neq0$.

习 题 3.7

1. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 为极大无关组，$\alpha_4=2\alpha_1-2\alpha_2+4\alpha_3$.

2. 设 A 的列向量为 $\alpha_i(i=1,2,3,4,5)$，则

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5]\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{pmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&3&-1\\0&0&1&-1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$=[\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3,\widetilde{\alpha}_4,\widetilde{\alpha}_5]$.

易看出 $\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2,\widetilde{\alpha}_3$ 线性无关，且 $\widetilde{\alpha}_4=\widetilde{\alpha}_1+3\widetilde{\alpha}_2-\widetilde{\alpha}_4$，$\widetilde{\alpha}_5=-\widetilde{\alpha}_2+\widetilde{\alpha}_3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为一个最大无关组，且 $\alpha_4=\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_5=\alpha_3-\alpha_2$.

3. $\overline{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{换}]{\text{行变}}\begin{bmatrix}1&4&1\\0&-9&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，秩 $A=2$，α_1,α_2 为最大无关组或用矩

阵 A 的子式也可求得上述结果.

习 题 3.8

1. 以 A,B,C 的行向量分别组成三个向量组,仿例 2 证明.

2. 证明一 设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的极大无关组为 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_t}$. 因它们均为 s 维向量,故 $t\leqslant s$($s+1$ 个 s 维向量必线性相关),又因 α_i 可由上述极大无关组表出,由命题 2.19.1 知 $s\leqslant t$,故 $t=s$.

证明二 因任一 s 维向量均可用 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出,故 $\beta_1,\cdots,\beta_s$ 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 等价.

习 题 4.1

1. (1) $\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&0&2&-1\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$,基础解系 $\alpha=\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$,特解 $\eta_0=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$,

通解 $\eta=k\alpha+\eta_0$.

(2) $\overline{A}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{bmatrix}1&0&1&0&3\\0&1&-2&0&-8\\0&0&0&1&6\end{bmatrix}$. 基础解系

$\alpha_1=[-1,2,,1,0]^T$,特解 $\eta_0=[3,-8,0,6]^T$. 通解为 $\eta=k\alpha_1+\eta_0$(k 为任意常数).

2. (1) $A=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n\\0&0&0&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,秩 $A=1<n$,有非零解,基础解系为

$\alpha_1=[-2,1,\cdots,0]^T,\alpha_2=[-3,0,1,0,\cdots,0]^T,\cdots,\alpha_{n-1}=[-n,0,\cdots,0,1]$.

(2) $\overline{A}=\begin{bmatrix}1&2&3&\cdots&n&1\\0&0&0&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$,一特解为 $\eta_0=[1,0,\cdots,0]^T$,全部解为 $\eta=k_1\alpha_1+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}+\eta_0$($k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数),其中 α_i 为(1)中所示.

习 题 4.2

1. 可用本节证法二、三、四证之.

2. 可用本节证法二、三证之.

3. 作 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}=0\text{(因第一二行相同)}.$$

将 D_n 按第 1 行展开,因第 1 行元素代数余子式为 $M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n+1}M_n$,故 $D_n=a_{11}M_1+a_{12}(-M_{12})+\cdots+a_{1n}(-1)^{n+1}M_n=0$.

而 D_n 中其他任意一行的元素与第 1 行元素的代数余子式之积之和为 0,于是得到

$a_{i1}M_1+a_{i2}(-M_2)+\cdots+a_{in}(-1)^{n+1}M_n=0(i=1,2,\cdots,n-1)$

由上两式可知 $[M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n+1}M_n]$ 是方程组的解向量.

又因秩 $(A)=n-1$,A 中至少有一个 $n-1$ 阶子式非零,而 A 的所有 $n-1$ 阶子式为 $M_1,M_2,\cdots,M_n$,从而其中至少有一个必不等于零.因而上面的解向量为非零的向量,故为一基础解系.

4. (A)入选.(B),(D),(C)中向量组均线性相关.

习　题 4.3

1. (1)有解的充要条件为 $a=-1/6$.

(2)特解为 $\eta_0=[6a,5a,3a,6a+1]=[-1,-5/6,-1/2,0]$;基础解系数为 $\alpha_1=[1,1,1,1]$.

2. $$\bar{A}\xrightarrow[\text{行变换}]{\text{经初等}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{4}a_i \end{pmatrix}$$ 为使方程有解,必秩 $\bar{A}=$ 秩 $A=3$,从而 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$

3. (1),(2),(3),(4)都不正确.　4. $A\neq E$,秩 $(A-E)\geqslant 1$,故秩 $(A)<n$.

5. 系数矩阵的行列式 $D=(n-1)(-1)^{n-1}\neq 0$.

6. 将(3.3.14)与 $b_1x_1+\cdots+b_nx_n=0$ 联立,,证明与(3.3.14)同解.

7. (3.3.15)的系数矩阵与增广矩阵的秩不等;(3.3.16)有唯一零解.

8. 由例 9 知 $AX=B$ 有解,但不唯一,必有秩 $[A,B]=$ 秩 $A<n=3$.由 |

$A|=(a+2)(a-1)^2=0$ 得 $a=1$ 或 $a=-2$，解不唯一．当 $|A|\neq 0$ 即 $a\neq -2$，且 $a\neq 1$ 时，解唯一．

习　题　4.4

1. $\bar{A}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & \lambda & -2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & -(\lambda+2)(\lambda-1) & 3(\lambda-1)\end{bmatrix}$

(1)当 $\lambda\neq -2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时，秩$(\bar{A})$=秩$(A)=3$，有唯一解；

(2)当 $\lambda=-2$ 时，秩 $A=2$，秩$(\bar{A})=3$，秩 $A\neq$ 秩$(\bar{A})$，无解；

(3)当 $\lambda=1$ 时，$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 秩 A=秩 $\bar{A}=1<n=3$，有无穷多组解．导出组的基础解系为 $\alpha_1=[-1,1,0]^T$，$\alpha_2=[-1,0,,1]^T$．特解为 $\eta_0=[-2,0,0]^T$，故全部解为 $\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta_0$（$k_1,k_2$ 为任意常数）.

2. 观察可知，方程组左边有关系：(2)=3(1)−(3)；(4)=5(1)−(3)．为使方程组有解右边也有相应关系：$a=3\cdot 1-3=0$，$b=5\cdot 1-3=2$．基础解系和特解分别为 $\alpha_1=[1,-2,1,0,0]^T$，$\alpha_2=[1,-2,0,1,0]^T$，$\alpha_3=[5,-6,0,0,1]^T$；$\eta_0=[-2,3,0,0,0]$一般解为

$$\eta=\eta_0+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3\ (k_1,k_2,k_3\ \text{为任意常数}).$$

3. $\lambda=1$ 时，方程组有解．基础解系为 $\alpha_1=[-1,2,1]^T$，特解为 $\eta_0=[1,-1,0]^T$．解的一般形式为 $\eta=k\alpha_1+\eta_0$（k 为任意常数）.

因各方程左端满足 2(5)+(6)=(7)，为使方程有解右端满足 $2\lambda+(\lambda+2)=2\lambda+3$．解之得 $\lambda=1$．去掉多余方程，解方程(6)，(7).

习　题　4.5

1. 左乘矩阵法（仿例 8）．　2. 代入法（参阅例 1）.

习　题　4.6

1. 对应的齐次线性方程组的基础解系为

$$\alpha=\eta_3-\eta_1=(\eta_2+\eta_3)-(\eta_1+\eta_2)=[0,-1,1,1]^T,$$

特解为 $\eta_0=(\eta_1+\eta_2)/2=[1/2,1/2,0,1]^T$

或　　$\eta_0=(\eta_2+\eta_3)/2=[1/2,0,1/2,3/2]^T$.

通解为 $\eta=k\alpha+\eta_0$（k 为任意常数）.

2. β_1,β_2 为 $AX=0$ 的解，而 $\beta_1+\beta_2\neq 0$（因 β_1,β_2 不相等）为基础解系，通

解为 $\alpha=k(\beta_1+\beta_2)$($k$ 为任意常数).

3. 解法一　通解为 $\eta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\eta_0$ 其中 $\alpha_1=\eta_1+\eta_2-(\eta_2+\eta_3)=[1,3,2]^T$，$\alpha_2=\eta_1+\eta_2-(\eta_3+\eta_1)=[0,2,4]^T$，$\eta_0=(\eta_1+\eta_2)/2=[1/2,1,3/2]^T$.

解法二　因 $n-r+1=3-1+1=3$，而 $\tilde{\eta}_1=(\eta_1+\eta_2)/2$，$\tilde{\eta}_2=(\eta_2+\eta_3)/2$，$\tilde{\eta}_3=(\eta_3+\eta_1)/2$ 为三个线性无关的解向量．故其通解为 $\eta=k_1\tilde{\eta}_1+k_2\tilde{\eta}_2+k_3\tilde{\eta}_3$，其中 $k_1+k_2+k_3=1$.

习　题　4.7

1. $A=[-1,1,1]$.　2. $A=[0,1,0]$(不唯一).

3. A 不唯一，$A=[0,1,0]$. 也可为 $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$，因$[0,-1,0]$，$[0,2,0]$均与$[0,1,0]$线性相关．故(C)入选．

习　题　4.8

1. (1)$X=\dfrac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$；　(2)$X=\begin{bmatrix}1/2 & -1/6\\ 3/4 & -5/12\\ -1/4 & 1/4\end{bmatrix}$；

(3)$X=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 10 & -4\\ -10 & 4\end{bmatrix}$.

2. 设 $Y=\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}$，由 $(A^{-1}B-C^{-1}D)Y=A^{-1}F-C^{-1}G$，得

$\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，解之得 $y_1=1$，$y_2=-1$，故

$Y=\begin{bmatrix}1 & -1\\ y_3 & y_4\end{bmatrix}$，$X=C^{-1}(G-DY)=\begin{bmatrix}3-y_3 & 3-y_4\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，其中 y_3,y_4 为任意数，特取 $y_3=2$，$y_4=3$，有 $X=E$，$Y=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$.

3. (1)$X=\begin{bmatrix}1/2-(3/2)x_3 & 1-(3/2)x_4\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，(2)无解．

习　题　4.9

1. 见§2.1例6.

2. $A=4E+B$ 由 $BX=XB$ 得 $X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_3 & x_1 & x_1\\ x_2 & x_3 & x_1\end{bmatrix}$($x_1,x_2,x_3$ 为任意数).

习　题　4.10

1. $AX=0$ 的基础解系为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$,则 $B=[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]$.

2. $B=\begin{bmatrix}-3b_{31} & -3b_{32} & -3b_{33}\\ 0 & 0 & 0\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix}$,$C=\begin{bmatrix}-C_{12} & C_{12} & 0\\ -C_{22} & C_{22} & 0\\ -C_{32} & C_{32} & 0\end{bmatrix}$.

3. 秩 $A=r$,$AX=\mathbf{0}$ 的基础解为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r}$,则 $B=[\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]$;$X^TA=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_{n-r}^T$,则 $C=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-r},\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}]$.

4. $Q(E-P)=O$,$E-P$ 的列向量为 $QX=\mathbf{0}$ 的解向量,因秩 $Q=m=X$ 的维数,$QX=\mathbf{0}$ 只有零解,$E-P=O$,即 $P=E$.

5. $AA^T=O$,行向量与自身正交(另解 §4.10 例 6).　6. 仿上题证明.

7. 取 α,β 分别为 $AX=\mathbf{0}$,$A^TX=\mathbf{0}$ 的非零解向量,将 α 和 $(n-1)$ 个零列向量组成 B;将 β 加上 $(n-1)$ 个列零向量构成 C^T,有 $AB=O$,$CA=O$.

习　题　5.1

1. 仿例 1 证明.　2. $B(C^{-1}\alpha)=\lambda_0(C^{-1}\alpha)$.　3. $|0E-A|=|A|=0$.

4. (2) $A^2=A\cdot A=\alpha^T\beta\cdot\alpha^T\beta=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=\alpha^T\cdot 0\beta=O$.

(3) n 为偶数时有 $A^n=A^{2k}=(A^2)^k=O$;n 为奇数时 $A^n=A\cdot A^{2k}=O$.

(4) $\lambda^n=0$,则 $\lambda=0$.

5. 先证 A_i 的特征值必为 1 与 0,然后证 1 和 0 确是特征值. 为此证 $|E-A_i|=0$,$|0E-A_i|=|A_i|=0$. 转化证明 $(E-A_i)X=\mathbf{0}$,$A_iX=\mathbf{0}$,有非零解.

6. $|-\lambda E-A|=(-1)^n|\lambda E+A|$

$$=(-1)^n|\lambda E-A^T|=(-1)^n|\lambda E-A|=0.$$

7. $|E-A|=|AA^T-A|=A|A^T-E|=(-1)^n|E-A^T|=(-1)|E-A|$

8. 仿例 24 证之.　9. 仿例 1 求之,$|\lambda A-E|=\lambda^3(\lambda-4)$.　10. (B)入选.

11. 仿 §1.10 例 1 用加边法可求得 $|\lambda E-A|=(\lambda-a^2+a^2\rho)^{n-1}[\lambda-a^2+(1-n)a^2\rho]$. A 的特征值 $\lambda_1=a^2[1+(n-1)\rho]$,$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=a^2(1-\rho)$. 因 $0<\rho<1$,$a^2>0$,$\lambda_1>\lambda_2=\cdots=\lambda_n$,最大特征值为 λ_1.

12. (B)入选.

习　题　5.2

1. 有特征值零(习题 5.1 第 3 题).　2. 2 不是特征值.

3. -1 不是 A 的特征值,$|(-1)E-A|\neq 0$,即 $|E+A|\neq 0$,$E+A$ 可逆. 由 $(E-A)(E+A)=0$,得到 $E-A=O$.

4. A 与 B 有相同特征值.

习 题 5.3

1. 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$,是;否则不是.

2. 参阅§5.1 例 13,例 18.

3. 参阅§5.1 习题 2 及§5.3 例 7. 4. 仿例 10,例 11.

习 题 5.4

1. 存在 P_1 使 $P_1^{-1}AP_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,则 $P_1^{-1}f(A)P_1=\mathrm{diag}(f(\lambda_1),\cdots,f(\lambda_n))$;$A$ 可逆,$P_1^{-1}A^{-1}P_1=\mathrm{diag}(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_n^{-n})$.

2. $|\lambda E-A|=0$ 的判别式 $(a-d)^2+bc>0$.

3. $|\lambda E-A|=(\lambda-2)^2$,$\lambda=2$ 为 A 的 3 重根. 显然秩$(A-2E)\neq n-k$

4. $\lambda_1=n,\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$,秩$(\lambda_1E-A)=n-\lambda_1=n-1$,秩$(\lambda_iE-A)=n-k_i=n-(n-1)=1$.

5. 设 $A\sim\Lambda_1,B\sim\Lambda_2$,对角阵 Λ_1,Λ_2 的对角元素相同,仅排列次序不同,由§5.4 例 2 知 $\Lambda_1\sim\Lambda_2$.

6. $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1,\alpha_1=[2,1,0]^T,\alpha_2=[1,0,-1]^T,\alpha_3=[3,5,8]^T$,线性无关.

7. 由 $P^{-1}AP=B$ 得 $P^{-1}(tE-A)P=tE-B$.(D)入选. 8. A 与 B 相似. 因有 3 个不同的特征值,且特征值一致:$\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=1$.

9. 仿例 5 解法一求之. $x=-2$.

10. 由题设知 A,B 与对角阵相似,其特征值相同,利用例 16 结论知 $A\sim B$.

11. A,B 有 3 个互异特征值,其特征值又相同,故 $A\sim B$.

习 题 5.5

1. $A^n=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}3^n+(-1)^n & 3^n+(-1)^{n+1}\\ 3^n+(-1)^{n+1} & 3^n+(-1)^n\end{bmatrix}$. 2. 仿例 11.

3. $\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$是互为逆矩阵,$A^n=\begin{bmatrix}1-10n & 4n\\ -25n & 1+10n\end{bmatrix}$.

4. 由例 2 知,$\alpha_1=[1,2]^T,\alpha_2=[-1,1]$分别为 A 的属于 $\lambda_1=5,\lambda_2=-1$ 的特征向量,故有

$$A^{100}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=5^{100}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},A^{100}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=(-1)^{100}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}.$$

而 $[0,3]^T=[1,2]^T+[-1,1]^T$,故

$$A^{100}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=A^{100}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+A^{100}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5^{100}-1\\2\cdot5^{100}+1\end{bmatrix}.$$

也可利用 A^n(例 2)直接计算 $A^{100}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$.

5. 仿例 5 求之. $\beta=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

$A^n\beta=[2(-1)^n+1,2(-1)^{n+1}+2,1-3^n]^T$.

习　题　5.6

1. (1) $\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&-2&-1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_2\end{pmatrix}=0$, 得 $\alpha_3=[1,0,1]^T$.

(2) $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]\mathrm{diag}(1,2,3)[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.　**3.** 见 §6.3 例 4.

4. A 与 B 的特征值相同为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1,\lambda_3=-1$. A 与 B 的属于它们的特征向量分别为

$\alpha_1=[1,0,0]^T,\alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[0,1,-1]^T$;

$\beta_1=[0,2,1]^T,\beta_1=[1,0,0]^T,\beta_1=[0,-1,0]^T$.

令　$P_1=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]^T,P_2=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]^T$, 则

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&2\\1&1&-2\end{pmatrix}\text{ 即为所求}.$$

习　题　6.1

1. $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&5\end{pmatrix},\Lambda=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

$$X=PY,P^{-1}AP=\Lambda=\mathrm{diag}(1,1,0).$$

2. $x_1=y_1+y_2,x_3=y_3+y_4,\cdots,x_{2n-1}=y_{2n-1}+y_{2n}$,

$x_2=y_1-y_2,x_4=y_3-y_4,\cdots,x_{2n}=y_{2n-1}-y_{2n}$.

$$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2n-1}^2-y_{2n}^2.$$

3. $Q=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$.

4. $f=X^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{bmatrix}X$.

$$|\lambda E-X|=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2\\ -2 & \lambda-4 & -4\\ 2 & -4 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+(-2)c_1}\begin{vmatrix}\lambda & -2 & 2(1-\lambda)\\ -2 & \lambda-4 & 0\\ 2 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -2\\ -2 & \lambda-4 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+4 & -10 & 0\\ -2 & \lambda-4 & 0\\ 2 & -4 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36).$$

A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$. 对应的特征向量为 $\alpha_1=[2,0,-1]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[1,5,2]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交(特征值互异),单位化得

$\eta_1=[2/\sqrt{5},0,-1/\sqrt{5}]^{\mathrm{T}},\eta_2=[1/\sqrt{30},5/\sqrt{30},2/\sqrt{30}]^{\mathrm{T}}$,

$\eta_3=[1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6}]^{\mathrm{T}}$.

正交矩阵 $Q=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$. 正交变换 $X=QY$ 化 f 为 $f=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2$.

习 题 6.2

1. 略. 2. $(5-\sqrt{5})/10<\lambda<(5+\sqrt{5})/10$.

3. $A=C^{\mathrm{T}}C,A^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}C$.

4. 秩 $V=k+1$,$XV=\mathbf{0}$ 只有零解,对 $X\neq\mathbf{0}$,有 $XV\neq\mathbf{0}$,$XVV^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}>0$.

5. $X\neq\mathbf{0}$,$X^{\mathrm{T}}(E-A^2)X=X^{\mathrm{T}}(E+A^{\mathrm{T}}A)X>0$.

6. 证明一由本节证法六即得. 证明二仿例 2 证之.

习　题　6.3

1. 证一 $A^T(A^T)^T=A^TA=A^{-1}A=E$.

证二 $A^{-1}=A^T,(A^{-1})^T=(A^T)^T,(A^T)^{-1}=(A^T)^T$.

2. (1) $\begin{cases} a=\pm 1/2, b=\pm\sqrt{3}/2, c=\mp\sqrt{3}/2, \\ a=\pm 1/2, b=\mp\sqrt{3}/2, c=\pm\sqrt{3}/2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a=\pm 2/\sqrt{5}, b=\mp 1/\sqrt{5}, c=\mp 1/\sqrt{5}, \\ a=\pm 2/\sqrt{5}, b=\mp 1/\sqrt{5}, c=\pm 1/\sqrt{5}. \end{cases}$

习　题　6.4

1. A 的和分解式的证明见例 1；C_i 的证明用§2.13 例 11 结论．

2. A 的特征值 $\lambda=1$ 或 -1，又秩 $A=n$，设 A 的特征值 1 的个数为 r，-1 的个数为 $n-r$. 于是存在正交阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{bmatrix}$.

3. A 的特征多项式为 $f(\lambda)=\lambda^{n-m}(\lambda-1)^m$，故 $f(-8)=|(-8)E-A|=(-8)^{n-m}(-9)^m$，$|8E-A|=(-1)^nf(-8)$.

4. $B=Q\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n})Q^{-1}$.

5. $A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}=A^T$，则 $AA^T=E$.

6. A 正定，有 Q 使 $A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}(\lambda_i>0)$ 且 $A=A^T$，又 A 为正交，故 $AA^T=E$，即 $Q\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2)Q^{-1}=E$，故 $\lambda_i^2=1,\lambda_i=1$，即 $A=QEQ^{-1}=E$. 反之，当 $A=E$ 时，$A=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)Q^{-1}$ 故 $AA^T=Q\mathrm{diag}(\lambda_1^2,\cdots,\lambda_n^2)Q^{-1}$，因 $A=E$ 的特征值 $\lambda_i=1$，故 $AA^T=E$，A 为正交阵．

7. A 正交，存在正交阵 Q，使

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)(\text{特征值 }\lambda_i>0)$$

$$Q^T(A+E)Q=\mathrm{diag}(\lambda_1+1,\cdots,\lambda_n+1).$$

两端取行列式得 $|A+E|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$.

8. 由题设存在正交阵 Q，使

$$\begin{aligned}Q^TAQ&=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\\&=\mathrm{diag}(\lambda_1,0,\cdots,0)+\cdots+\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\lambda_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A&=Q\mathrm{diag}(\lambda_1,0,\cdots,0)Q^T+\cdots+Q\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\lambda_n)Q^T\\&=S_1+\cdots+S_n[S_i=Q\mathrm{diag}(0,\cdots,0,\lambda_i,0,\cdots,0)Q^T]\end{aligned}$$

令 $Q=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$，其中 α_i 为 n 维向量，则

$$S_i=[\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_i & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1^{\mathrm{T}}\\ \cdots \\ \alpha_i^{\mathrm{T}} \\ \cdots \\ \alpha_n^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$=\lambda_i\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}}$（$Q$ 为实矩阵，α_i 也是）

秩$(\alpha_i\alpha_i^{\mathrm{T}})=$秩$(\alpha_i)$[见(2.13.3)式]$=1$.

9. 仿例 10 证明.

习　题　6.5

1. 仿例 1 求之.(1)$x=0,y=1$，(2)$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，其中

$\alpha_1=[1,0,0]^{\mathrm{T}},\alpha_2=[0,1,1]^{\mathrm{T}},\alpha_3=[0,1,-1]^{\mathrm{T}}$.

2. 比较 A 与 B 的特征多项式的同次幂系数得

$$\begin{cases}3+x=1+y+z,\\ 3x-4=y+z+yz+6,\\ 4x=1+y+z.\end{cases}\text{解之}\begin{cases}x=1\\ y=5\\ z=-2;\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x=1,\\ y=-2,\\ z=5.\end{cases}$$

3. 将 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ 中任意两个代入 $|\lambda E-A|=0$ 求得 $a=3,b=1$. 对应的单位正交特征向量分别为

$\alpha_1=[1/\sqrt{2},0,-1/\sqrt{2}]$,

$\alpha_2=[1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}]$,

$\alpha_3=[1/\sqrt{6},2/\sqrt{6},1/\sqrt{6}]$,　$P=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$.

习　题　7.1

1. (1)不是；(2)是；(3)是；(4)不是.　**2.** 不是.

3. (1)不是；(2)是；(3)不是.　**4.** (1)是；(2)是.(3)不是.

习　题　7.2

1. $\{E_{ij}\mid i=1,2,\cdots,n;j=i,i+1,\cdots\}$ $(\{E_{ij}\mid i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,i\})$

2. $\{E_{ij}\}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$，维数为 12.

3. $\alpha_4=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3,\alpha_5=3\alpha_1-3\alpha_2-2\alpha_3$.　**4.** $\alpha_4=\varepsilon_4,\alpha_5=\varepsilon_5$.

5. $\alpha_1=[5,4,1,0,0],\alpha_2=[-5,-3,0,1,0],\alpha_3=[0,-1,0,0,1]$.

习　题　7.3

1. $\begin{cases}\alpha_1=(1/2)\alpha_3+(3/2)\alpha_4,\\ \alpha_2=(1/2)\alpha_3+(1/2)\alpha_4,\end{cases}$ $\begin{cases}\alpha_3=(-1)\alpha_1+3\alpha_2,\\ \alpha_4=\alpha_1+(-1)\alpha_2.\end{cases}$

2. α,β 线性相关，其分量成比例．

3. $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\subseteq L(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)$ 且其维数相等．

4. 证等式两端的子空间互相包含．

习 题 7.4

1. $P_1=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}, P_2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2/3&1/3&1/3&1/3\\1/3&-2/3&1/3&1/3\\1/3&1/3&-2/3&1/3\\1/3&1/3&1/3&-2/3\end{bmatrix}$.

3. $\alpha'_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n,\qquad \alpha'_2=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n.$

$\alpha'_3=\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_n,\cdots,\quad \alpha_n=\alpha_n.$

习 题 7.5

1. $[1,1,-1]$，事实上 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$.　2. $[2,0,-1]$.

3. (1)过渡矩阵为例 3 中(7.5.6)式最右端矩阵 B；

(2)将(7.5.9)式中坐标 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 分别改为 x_1,x_2,x_3,x_4 即得所求坐标．

(3)所求向量为 $(-x_4)[1,1,1,-1](x_4\neq 0)$.

习 题 7.6

1. $\begin{bmatrix}a^2&ac&ab&bc\\ab&ad&b^2&bd\\ca&c^2&ad&dc\\cb&cd&db&b^2\end{bmatrix}$,　2. (1) $\begin{bmatrix}1&3&2&2\\2&5&1&-1\\-1&3&0&1\\1&2&1&2\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}2&4&4&5\\-3&-4&-6&-4\\1&1&4&1\\1&2&4&6\end{bmatrix}$.　3. $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&-1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$.

4. 先验证 T 为 V_3 中的线性变换．由矩阵运算律得到

$T(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=T(\boldsymbol{B}_1)+T(\boldsymbol{B}_2), T(k\boldsymbol{B}_1)=kT(\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2\in V_3)$

又 $T(A_1)=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=A_1+A_2+A_3$, $T(A_2)=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\end{bmatrix}=0A_1+A_2+2A_3$,

$T(A_3)=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=0A_1+0A_2+A_3$,

故 $\quad T(A_1,A_2,A_3)=[A_1,A_2,A_3]\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}.$

附　录

（同济大学数学教研室编"线性代数"（第三版）部分习题解答查找表）

原书题号	本书页数	原书题号	本书页数	原书题号	本书页数
1.3	6	2.10	143	4.3(3)	185
1.4(1),(2)	19	2.11(4)	98	4.3(4)	178
1.4(2)	28	2.12(4)	174	4.4	213
1.7(1)	21	2.12(4)	298	4.5	230
1.5(2)	14	2.14	88	4.6(2)	239
1.5(3)	18	2.15	90	4.7(2)	239
1.5(4)	38	2.16	100	4.8	223
1.5(5)	53	2.17	353	4.9	225
1.7(2)	56	2.19	105	4.10	240
1.7(3)	35	2.21	363	4.10	241
1.7(5)	68	2.22	134	4.11	164
1.7(6)	59	3.2	156	4.12	159
1.8(2)	73	3.3	163	4.12	219
1.9	80	3.5(1)	150	4.14	432
1.10	78	3.7(2)	250	4.15	434
2.6(1)	87	3.7(3)	249	4.16	430
2.6(2)	86	3.8	273	4.17(3)	250
2.6(2)	305	3.9	274	4.19	292
2.6(3)	84	3.10	271	4.20	285
2.7	362	3.12(1)	293	4.21	165
2.8	356	3.12(2)	296	4.22	159
2.8	357	4.3(1)	182	4.24	221
2.9	138	4.3(2)	180	4.25	279

续表

原书题号	本书页数	原书题号	本书页数	原书题号	本书页数
4.26	288	5.7	365	6.3	431
5.2	399	5.7	366	6.4	427
5.3	402	5.8	368	6.5	442
5.4(2)	316	5.9(2)	387	6.7	450
5.5	411	5.11(3)	377	6.9	424
5.6	324	5.13	409	6.10	454
5.6	349	5.15	391	6.11	461
5.7	364	5.16	405	6.14	432

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝线性代数解题方法技巧归纳（第二版）
作者＝
页数＝４８３
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝９６８６１１２５