

首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答 (非数学类, 2009)

考试形式: 闭卷 考试时间: 120 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	20	5	15	15	10	10	15	10	100
得分									

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

得分	
评阅人	

一、 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分).

(1) 计算 $\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy =$ _____, 其中

区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 满足 $f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx - 2$, 则 $f(x) =$ _____.

(3) 曲面 $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$ 平行平面 $2x + 2y - z = 0$ 的切平面方程是 _____.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则 $\frac{d^2 y}{dx^2} =$ _____.

答案: $\frac{16}{15}$, $3x^2 - \frac{10}{3}$, $2x + 2y - z - 5 = 0$, $-\frac{[1-f'(y)]^2 - f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

专业:

年级:

所在院校:

身份证号:

姓名:

线
—
封
—
密

得分	
评阅人	

二、(5分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow 0} \exp \left\{ \frac{e}{x} \ln \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n} \right) \right\}$
 $= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n)}{x} \right\}$ (2分)

其中大括号内的极限是 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 由 *L'Hospital* 法则, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(\ln(e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}) - \ln n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e(e^x + 2e^{2x} + \dots + ne^{nx})}{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}$$

$$= \frac{e(1 + 2 + \dots + n)}{n} = \left(\frac{n+1}{2} \right) e$$

于是 原式 = $e^{\left(\frac{n+1}{2} \right) e}$ (5分)

得分	
评阅人	

三、(15分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^1 f(xt) dt$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解: 由题设, 知 $f(0) = 0$, $g(0) = 0$ (2分)

令 $u = xt$, 得 $g(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x}$ ($x \neq 0$) , (5分)

从而 $g'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2}$ ($x \neq 0$)(8分)

由导数定义有

$$g'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}$$
(11分)

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u) du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u) du}{x^2} = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = g'(0)$,

从而知 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.(15分)

得分	
评阅人	

四、(15分) 已知平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$,

L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx ;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 .$$

证法一: 由于区域 D 为一正方形, 可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

$$(1) \text{ 左边} = \int_0^\pi \pi e^{\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx , \quad \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\text{右边} = \int_0^\pi \pi e^{-\sin y} dy - \int_\pi^0 \pi e^{\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx , \quad \dots\dots(8 \text{ 分})$$

$$\text{所以} \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由于} e^{\sin x} + e^{-\sin x} \geq 2 + \sin^2 x , \quad \dots\dots(12 \text{ 分})$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \pi \int_0^\pi (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) dx \geq \frac{5}{2} \pi^2 . \quad \dots\dots(15 \text{ 分})$$

证法二: (1) 根据 *Green* 公式, 将曲线积分化为区域 D 上的二重积分

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta \quad \dots\dots(4 \text{ 分})$$

$$\oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\delta \quad \dots\dots(8 \text{ 分})$$

因为 关于 $y = x$ 对称, 所以 $\iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x}) d\delta$, 故

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx . \quad \dots\dots(10 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由} e^t + e^{-t} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \geq 2 + t^2$$

$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) d\delta = \iint_D (e^{\sin x} + e^{-\sin x}) d\delta \geq \frac{5}{2} \pi^2 . \quad \dots\dots(15 \text{ 分})$$

得分	
评阅人	

五、(10分) 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}$, $y_2 = xe^x + e^{-x}$,

$y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

解: 根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的知识, 由题设可知: e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解, 且 xe^x 是非齐次的一个特解. 因此可以用下述两种解法(6分)

解法一: 故此方程式 $y'' - y' - 2y = f(x)$ (8分)

将 $y = xe^x$ 代入上式, 得

$$f(x) = (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x = 2e^x + xe^x - e^x - xe^x - 2xe^x = e^x - 2xe^x ,$$

因此所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$ (10分)

解法二: 故 $y = xe^x + c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$, 是所求方程的通解,(8分)

由 $y' = e^x + xe^x + 2c_1e^{2x} - c_2e^{-x}$, $y'' = 2e^x + xe^x + 4c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$, 消去 c_1, c_2 得所求方程为 $y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$ (10分)

得分	
评阅人	

六、(10分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点, 当 $0 \leq x \leq 1$

时, $y \geq 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c , 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解: 因抛物线过原点, 故 $c=1$

由题设有 $\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{1}{3}$. 即 $b = \frac{2}{3}(1-a)$,(2分)

而 $V = \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi [\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}b^2]$
 $= \pi [\frac{1}{5}a^2 + \frac{1}{3}a(1-a) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}(1-a)^2]$(5分)

令 $\frac{dV}{da} = \pi [\frac{2}{5}a + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}a - \frac{8}{27}(1-a)] = 0$,

得 $a = -\frac{5}{4}$, 代入 b 的表达式得 $b = \frac{3}{2}$. 所以 $y \geq 0$,(8分)

线 封 密

又因 $\frac{d^2v}{da^2} \Big|_{a=-\frac{5}{4}} = \pi \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} \right] = \frac{4}{135} \pi > 0$ 及实际情况, 当 $a = -\frac{5}{4}, b = \frac{3}{2}, c = 1$ 时, 体积最小.(10分)

得 分	
评阅人	

七、(15分) 已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x \quad (n \text{ 为正整数}),$$

且 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

解: 先解一阶常系数微分方程, 求出 $u_n(x)$ 的表达式, 然后再求 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和.

由已知条件可知 $u_n'(x) - u_n(x) = x^{n-1}e^x$ 是关于 $u_n(x)$ 的一个一阶常系数线性微分方程, 故其通解为

$$u_n(x) = e^{\int dx} \left(\int x^{n-1} e^x e^{-\int dx} dx + c \right) = e^x \left(\frac{x^n}{n} + c \right), \quad \dots\dots\dots(6 \text{ 分})$$

由条件 $u_n(1) = \frac{e}{n}$, 得 $c = 0$, 故 $u_n(x) = \frac{x^n e^x}{n}$,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n e^x}{n} = e^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$(8分)

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, 其收敛域为 $[-1, 1)$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}, \quad \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$

故 $s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\ln(1-x)$ (12分)

当 $x = -1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^{-1} \ln 2$(13分)

于是, 当 $-1 \leq x < 1$ 时, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = -e^x \ln(1-x)$(15分)

得 分	
评阅人	

八、(10分) 求 $x \rightarrow 1^-$ 时, 与 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解: $\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt \leq \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leq 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2} dt, \dots\dots\dots(3 \text{ 分})$

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} dt \dots\dots\dots(7 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\ln \frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}. \dots\dots\dots(10 \text{ 分})$$